

<https://doi.org/10.21869/2223-1528-2022-12-1-208-218>



Численное решение обратной задачи для уравнения Шредингера и разных порогов парциальных каналов

Н. А. Хохлов¹, Е. П. Кочура¹✉, Е. И. Крамарь², В. Э. Дрейзин¹

¹ Юго-Западный государственный университет
ул. 50 лет Октября 94, г. Курск 305040, Российская Федерация

² Тихоокеанский государственный университет,
ул. Тихоокеанская 136, г. Хабаровск 680035, Российская Федерация

✉ e-mail: ekochura@mail.ru

Резюме

Цель исследования. Рассматривается проблема постановки и решения обратных задач для систем уравнений шредингеровского типа и связанная с такими задачами (в подходах Гельфанда – Левитана и Марченко) проблема решения систем интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Методы. На основе выполненного анализа представлена постановка обратной задачи теории квантового рассеяния для радиальных уравнений Шредингера, в подходе Марченко, при наличии нескольких связанных каналов с разными порогами (на примере двух каналов, с очевидным обобщением). Приведены конкретные свойства соответствующей S -матрицы рассеяния и асимптотик возможных связанных состояний, необходимые и достаточные для однозначного решения рассматриваемой в работе обратной задачи и ее физической адекватности.

Результаты. Получена квазирациональная аппроксимация элементов S -матрицы (аппроксимация типа Паде) для обратной задачи теории рассеяния для системы двух уравнений шредингеровского типа с разными порогами, обладающая всеми необходимыми и достаточными для возможности решения свойствами в явном виде. Данная аппроксимация позволяет получить решение рассматриваемой обратной задачи (системы связанных уравнений Марченко – интегральных уравнений Фредгольма второго рода), в принципе, в аналитическом виде. Разработан алгоритм численного решения указанной обратной задачи.

Заключение. Обсуждаются возможные области применения предлагаемого в работе алгоритма и разработанного метода численного решения обратной задачи для уравнений (систем уравнений) шредингеровского типа и других подобных обратных задач. В работе получено аналитическое решение обратной задачи теории рассеяния для системы уравнений шредингеровского типа с разными порогами в случае S -матрицы специального вида. Подобранный специальный вид S -матрицы позволяет аппроксимировать (интерполировать) любые физически адекватные S -матрицы.

Ключевые слова: обратная задача; теория рассеяния; метод Марченко; система интегральных уравнений; аппроксимация Паде.

Конфликт интересов: Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Для цитирования: Численное решение обратной задачи для уравнения Шредингера и разных порогов парциальных каналов / Н. А. Хохлов, Е. П. Кочура, Е. И. Крамарь, В. Э. Дрейзин // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии. 2022. Т. 12, № 1. С. 208–218. <https://doi.org/10.21869/2223-1528-2022-12-1-208-218>

Поступила в редакцию 21.02.2022

Подписана в печать 24.02.2022

Опубликована 30.03.2022

Inverse Problem Numerical Solution for Schrödinger Equation and Different Thresholds of Partial Channels

Nikolai A. Khokhlov¹, Evgeniya P. Kochura¹✉, Elena I. Kramar², Valery E. Dreizin¹

¹ Southwest State University
50 Let Oktyabrya str. 94, Kursk, 305040, Russian Federation

² Pacific National University,
136 Tikhoookeanskaya st., Khabarovsk 680035, Russian Federation

✉ e-mail: roslyakova.rli@yandex.ru

Abstract

Purpose of research. We consider a problem of setting up and solution the inverse scattering problem for systems of Schrödinger equations. We consider a connected problem (in Gelfand–Levitan and Marchenko approaches) of solution of systems of Fredholm integral equations of the second kind.

Methods. Based on the performed an analysis the setting up of the scattering theory inverse problem for radial Schrödinger equations is presented in Marchenko approach for case of a number of coupled channels with different thresholds (by the example of two channels with obvious generalization).

Results. Specific properties of the corresponding scattering S -matrix and asymptotics of possible bound states are obtained necessary and sufficient for explicit solution of the considered inverse scattering problem and its physical adequacy. A quasirational approximation of the S -matrix elements (Pade type approximant) for the scattering theory inverse problem for system of Schrödinger type equations is presented. The obtained approximation has explicitly all the necessary and sufficient properties for solution of the considered problem. The presented approximation allows to solve the considered inverse problem (system of coupled Marchenko equations – Fredholm integral equations of the second kind analytically, in principle).

Conclusion. Possible areas of application of the presented algorithm and developed method of numerical solution of the inverse problem of equations (systems of equations) of Schrödinger type and other similar problems. Analytical solution of the scattering theory inverse problem for the system of Schrödinger type equations with different thresholds and for case of specific kind S -matrix. Designed specific kind of S -matrix allows to approximate (interpolate) any physically adequate S -matrices.

Keywords: inverse problem; scattering theory; Marchenko method; system of integral equations; Pade approximant.

Conflict of interest: The authors declares the absence of obvious and potential conflicts of interest related to the publication of this article.

For citation: Khokhlov N. A., Kochura E. P., Kramar E. I., Dreizin V. E. Experimental Verification of Additive Elasticity Model of Magnetic Fluids. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Tekhnika i tekhnologii* = *Proceedings of the Southwest State University. Series: Engineering and Technologies*. 2022; 12(1): 208–218. (In Russ.) <https://doi.org/10.21869/2223-1528-2022-12-1-208-218>

Received 21.02.2022

Accepted 24.02.2022

Published 30.03.2022

Введение

Возникшая менее ста лет назад теория обратных задач в настоящее время является одним из важнейших направлений как фундаментальных, так и прикладных исследований. В общем виде ее можно сформулировать как задачу определения некоторой функции (оператора) $V(r)$ по экспериментально определяемой функции $S(k)$, из уравнения обратной задачи $S(k) = \hat{A}[V(r), k]$, где $\hat{A}$ есть некоторый известный оператор. Все величины, входящие в уравнение в общем случае, могут быть многомерными. Необходимость решения обратных задач имеется во многих естественно-научных дисциплинах и технических приложениях [1–5]. Например, задачи об определении формы внутреннего дефекта (анизотропии) твердого тела с помощью ультразвукового исследования, как и многие задачи в оптике, приводят к системам интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Рассматриваемая в работе обратная задача квантового рассеяния (для дифференциального оператора Штурма – Лиувилля) приводит к системам интегральных уравнений Фредгольма второго рода (методы Гельфанда – Левитана, Марченко, Крейна). Такого типа задача возникает как в квантово-механических приложениях [6–16], так и в акустике [17; 18] и оптике [19].

В физических квантовых системах (атомных, ядерных) число открытых каналов реакций можно считать конечным, но полное число каналов бесконечно, с ростом энергии системы растет число открытых каналов. Прямая задача

для уравнения Шредингера в случае бесконечного числа каналов нерешаема. Для большинства рассчитываемых квантовых задач принимается модель сильно связанных каналов в приближении конечного числа состояний [6]. В этой работе нами представлено обобщение метода Марченко для решения обратной задачи теории квантового рассеяния [7]. Полученное нами обобщение позволяет получить аналитически решение обратной задачи для радиального уравнения Шредингера с несколькими связанными каналами, имеющими разные пороги. Решение аналогичной обратной задачи для бесконечной прямой было получено ранее в работе [8].

Материалы и методы

В прямой задаче квантового рассеяния решается радиальное уравнение Шредингера

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\hat{L}^2}{r^2} - V(r) + Q^2 \right) \psi(r, q) = 0. \quad (1)$$

Входящие в это уравнение матрицы имеют вид

$$\hat{L}^2 = \begin{pmatrix} l_1(l_1+1) & 0 \\ 0 & l_2(l_2+1) \end{pmatrix}; \quad V(r) = \begin{pmatrix} V_1 & V_T \\ V_T & V_2 \end{pmatrix}; \quad (2)$$

$$Q = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}; \quad \psi(r, q) = \begin{pmatrix} \psi_{11}(r, q) & \psi_{12}(r, q) \\ \psi_{21}(r, q) & \psi_{22}(r, q) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Это, соответственно, матрица квадрата орбитального момента, матрица потенциалов, матрицы импульсов в каналах и волновых функций. Мы определяем пороги каналов E_2 и E_1 канала: $E_2 \geq E_1 = 0$ (q^2 – энергия системы). Внутренние импульсы каналов

$$q_1 = q, \quad q_2 \equiv q_2(q) = \begin{cases} +\sqrt{q^2 - E_2} & \text{для } q \geq \sqrt{E_2}; \\ +i\sqrt{E_2 - q^2} & \text{для } |q| < \sqrt{E_2}; \\ -\sqrt{q^2 - E_2} & \text{для } q \leq -\sqrt{E_2}. \end{cases} \quad (4)$$

Для метода Марченко определим исходные (экспериментальные) данные:

$$\{S(q), (0 < q < \infty), \alpha_j, M_j, j = 1, \dots, n\}, \quad (5)$$

где $S(q)$ – матрица рассеяния (задает асимптотику состояний рассеяния при $r \rightarrow +\infty$ регулярных в $r=0$ решений уравнения (1); $\alpha_j^2 \leq 0$ – энергия j -го связанного состояния ($i\alpha_j \geq 0$); M_j – матрица, элементы которой задают асимптотику компонент волновой функции j -го связанного состояния. Используем следующую параметризацию S -матрицы [6]:

$$S = Q^{\frac{1}{2}} \tilde{S} Q^{-\frac{1}{2}}, \quad (6)$$

квадратные корни определены как главные значения. S -матрицу $\tilde{S} \equiv \tilde{S}(q)$ при $|q| > \sqrt{E_2}$ запишем как S -матрицу для случая равных порогов:

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(2i\delta_1) \cos 2\varepsilon & \exp(i(\delta_1 + \delta_2)) \sin 2\varepsilon \\ \exp(i(\delta_1 + \delta_2)) \sin 2\varepsilon & \exp(2i\delta_2) \cos 2\varepsilon \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где $\delta_i \equiv \delta_i(q)$ ($i = 1, 2$), $\varepsilon \equiv \varepsilon(q)$ вещественны. Для $|q| < \sqrt{E_2}$ $\tilde{S}$ -матрица имеет вид

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} \exp(2i\tilde{\delta}_1) & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где фазовый сдвиг $\tilde{\delta}_1 \equiv \tilde{\delta}_1(q)$ вещественен. Определенные таким образом пара-

метризации (6) и (7) обеспечивают условия унитарности S -матрицы выше порога второго канала и унитарности 1×1 главной подматрицы для энергий между первым и вторым порогами. Кроме этого, элементы S -матрицы (5) являются аналитическими функциями q (исключая пороговые точки ветвления $|q| = \sqrt{E_2}$, и полюса вне вещественной оси [6]). Уравнение Марченко имеет такой же вид, как и для случая равных порогов:

$$F(x, y) + L(x, y) + \int_x^{+\infty} L(x, t) F(t, y) dt = 0. \quad (9)$$

Это матричное уравнение является системой линейных интегральных уравнений Фредгольма II-го рода. Ядро (матрица) уравнения

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(Qx) [I - S(q)] \times \\ \times H(Qy) dq + \sum_{j=1}^n H(\tilde{Q}_j x) M_j^2 H(\tilde{Q}_j y), \quad (10)$$

где

$$H(Qx) = \begin{pmatrix} h_1^+(qx) & 0 \\ 0 & h_2^+(q_2 x) \end{pmatrix}, \\ H(\tilde{Q}_j x) = \begin{pmatrix} h_1^+(\beta_j x) & 0 \\ 0 & h_2^+(q_2(\beta_j) x) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

и I – единичная матрица. Найдя из уравнения (8) матричную функцию $L(x, y)$, получим потенциал уравнения Шредингера (1):

$$V(r) = -2 \frac{dL(r, r)}{dr}. \quad (12)$$

Таким образом, нами представлено обобщение формализма Марченко в слу-

чае разных порогов парциальных каналов. Для равных порогов $E_2 = E_1 = 0$ получаем формализм Марченко для связанных каналов с равными порогами [9]. Очевидным образом получаем обобщение для случая конечного числа каналов большего двух.

Результаты и их обсуждение

Для численного решения уравнения рассматриваемой задачи будем использовать следующие аппроксимации функций из выражений (7), (8):

$$\begin{aligned} \exp(i\delta_j) &= \frac{f_2^j(q) + if_1^j(q)}{f_2^j(q) - if_1^j(q)}; \\ \cos(2\varepsilon) &= \frac{(f_2^{12}(q))^2 - (\sqrt{q_2 q} f_1^{12}(q))^2}{(f_2^{12}(q))^2 + (\sqrt{q_2 q} f_1^{12}(q))^2}; \\ \sin(2\varepsilon) &= \frac{2\sqrt{q_2 q} f_1^{12}(q) f_2^{12}(q)}{(f_2^{12}(q))^2 + (\sqrt{q_2 q} f_1^{12}(q))^2}, \quad (13) \end{aligned}$$

где $f_k^j(x)$ ($k = 1, 2$) – некоторые полиномы x , четные для $i = 1$ и нечетные для $i = 2$. S -матрица, определенная в параметризации (13), обладает необходимыми свойствами, если ее элементы продлить в область $|q| < \sqrt{E_2}$ в соответствии с соотношениями (6), (13) и (4). В самом деле, S -матрица выше порога второго канала унитарна, т. к. здесь $q_j > 0$. Унитарна (1×1) главная подматрица между порогами (q_2 – положительный мнимый, а q – положительный действительный, т. к.

$$\begin{aligned} \cos(2\varepsilon) &= \frac{|f_2^{12}(q)|^2 - i|\sqrt{q_2 q} f_1^{12}(q)|^2}{|f_2^{12}(q)|^2 + i|\sqrt{q_2 q} f_1^{12}(q)|^2} = \\ &= \exp(2i\sigma), \end{aligned}$$

где мы вводим аналитическую функцию $\sigma \equiv \sigma(q)$, вещественную между порогами. При значениях q на положительной мнимой полуоси, $q^2 < 0$, q_2 положительный мнимый и S -матрица симметрична и вещественна.

Ранее нами использовался частный случай такой аппроксимации [10; 11] для численного решения (9) в случае $E_2 = E_1 = 0$. При такой аппроксимации ядро (10) становится сепарабельным и уравнение (9) решается аналитически. В нашем случае последовательность решения аналогична. Подстановка (13) в (7) и затем в (10) позволяет проинтегрировать выражение для ядра, используя теорему о вычетах:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= i \sum_{i=1}^{n_{pos}} \text{Res}[H(qx)(I - S(q))H(qy)] \Big|_{q=\beta_i} + \\ &+ \sum_{i=1}^{n_b} H(\beta_i x) M_i^2 H(\beta_i y) = \sum_{i=n_1+1}^n H(\beta_i x) Q_i^1 H(\beta_i y) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n_1} (x H'(\beta_i x) Q_i^2 H(\beta_i y) + H(\beta_i x) Q_i^2 H'(\beta_i y) y). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь предполагается, что выражения (13) имеют полюса только первого порядка – нет физических оснований предполагать обратное (в ином случае рассмотрение технически усложняется, но по сути не меняется). Тогда очевидно, что (сравним (13) и (7)) внедиагональные элементы S -матрицы имеют полюса только первого порядка, в то время как диагональные элементы имеют полюса как первого, так и второго порядка. Ука-

занные полюса второго порядка являются полюсами первого порядка недиагональных элементов, в списке полюсов S-матрицы $\beta_i (i=1, \dots, n_{\text{pos}})$ с $\text{Im}[\beta_i] > 0$ такие полюса перечислены дважды. Таким образом, $\beta_i (i=1, \dots, n_1)$ – полюса второго порядка; $\beta_i (i=n_1+1, \dots, n_{\text{pos}})$ – полюса первого порядка; объединим также слагаемые, возникающие от полюсов первого порядка с подобными от связанных состояний: $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_{n_{\text{pos}}}, \alpha_1, \dots, \alpha_{n_b}\}$, $n = n_{\text{pos}} + n_b$; также введены обозначения матриц (2×2) :

$$H'(x) = \begin{pmatrix} dh_1^+(x)/dx & 0 \\ 0 & dh_2^+(x)/dx \end{pmatrix};$$

$$Q_i^1 = -\lim_{q \rightarrow \beta_i} (q - \beta_i) S(q), \quad (i = n_1 + 1, \dots, n_{\text{pos}});$$

$$Q_i^1 = M_i^2, \quad (i = n_{\text{pos}}, \dots, n);$$

$$Q_i^2 = -\lim_{q \rightarrow \beta_i} \frac{d}{dq} (q - \beta_i)^2 S(q) \quad (i = 1, \dots, n_1). \quad (15)$$

Полиномы, входящие в аппроксимации (13), могут иметь высокий порядок, с тем чтобы достаточно точно аппроксимировать данные эксперимента (в наших расчетах [10; 11] до 40), поэтому для расчета выражений (15) должны использоваться компьютерные программы (например, Maple). Ядро (14) является сепарабельным, и уравнение (9) в этом случае решается подстановкой [11]:

$$L(x, y) = \sum_{i=1}^n P_i(x) H(\beta_i y) + \sum_{i=1}^n N_i(x) y H'(\beta_i y), \quad (16)$$

где $P_i(x), N_i(x)$ – неизвестные (2×2) матрицы – функции от x . Поскольку мат-

рицы $H(\beta_i y)$ и $y H'(\beta_i y)$ линейно независимы, то подстановка (14) и (16) в (9) приводит к системе линейных относительно неизвестных $P_i(x), N_i(x)$ уравнений:

$$\begin{cases} \sum_i (P_i(x) Q_{ij}^3(x) + N_i(x) Q_{ij}^5(x)) = \\ = H(\beta_j x) Q_j^1 + x H'(\beta_j x) Q_j^2, \quad i, j = 1, \dots, n, \\ \sum_i (N_i(x) Q_{ij}^6(x) + P_i(x) Q_{ij}^4(x)) = \\ = H(\beta_j x) Q_j^2, \quad j = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (17)$$

Введены обозначения:

$$Q_{ij}^3(x) = I \delta_{ij} + \left(\int_x^{+\infty} H(\beta_i t) H(\beta_j t) dt \right) Q_j^1 +$$

$$+ \left(\int_x^{+\infty} t H(\beta_i t) H'(\beta_j t) dt \right) Q_j^2;$$

$$Q_{ij}^4(x) = \left(\int_x^{+\infty} H(\beta_i t) H(\beta_j t) dt \right) Q_j^2;$$

$$Q_{ij}^5(x) = \left(\int_x^{+\infty} t H'(\beta_i t) H(\beta_j t) dt \right) Q_j^1 +$$

$$+ \left(\int_x^{+\infty} t^2 H'(\beta_i t) H'(\beta_j t) dt \right) Q_j^2;$$

$$Q_{ij}^6(x) = I \delta_{ij} + \left(\int_x^{+\infty} t H'(\beta_i t) H(\beta_j t) dt \right) Q_j^2. \quad (18)$$

Интегралы, входящие в (18), введены в [12]. Система (17) $2n$ -матричных линейных уравнений приводится к системе $8n$ -скалярных линейных уравнений с известными коэффициентами и может быть решена численно, в результате мы получаем элементы матриц $P_i(x), N_i(x)$ для любых фиксированных значений x . Зная эти матрицы, можно рассчитать их производные $dP_i(x)/dx, N_i(x)/dx$. Затем из (16) и (17) получаем решение обратной задачи – потенциал $V(r)$.

Алгоритм иллюстрируется блок-схемой, приведенной на рисунке.

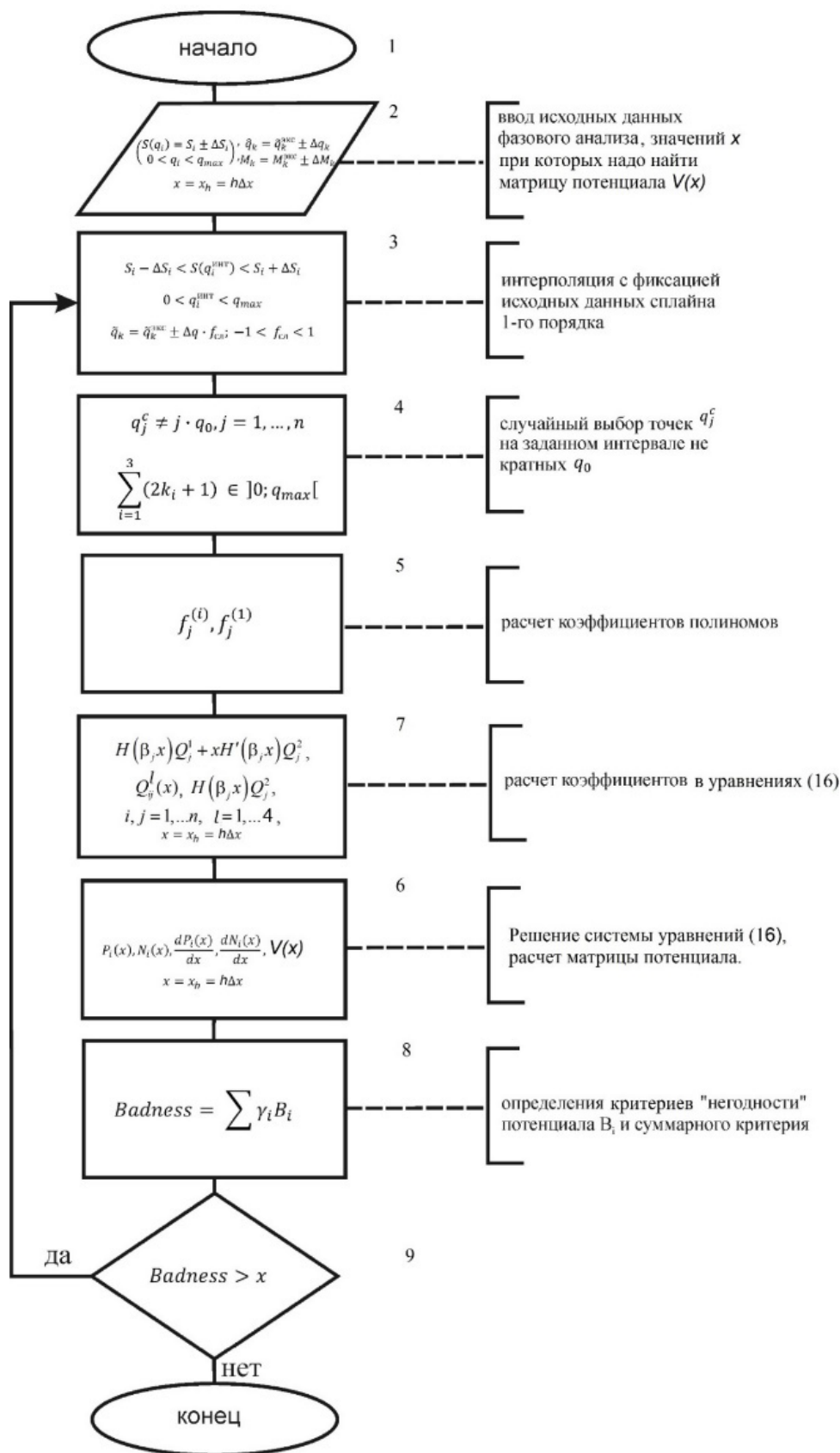


Рис. Блок-схема численного решения обратной задачи

Fig. Block diagram of the inverse problem numeral solution

Одним из существенных элементов алгоритма является оценка полученного решения на основе некоторых критериев «негодности», в случае «негодности» процедура решения повторяется с новым выбором исходных данных из возможных интервалов, определяемых погрешностями экспериментальных данных. Необходимость такой оценки связана с проблемой некорректности – в данном случае неоднозначности решения, что связано как с приближённостью экспериментальных исходных данных, так и с их отсутствием при больших значениях энергии.

Выводы

Как показывают результаты численных экспериментов, хорошими критериями являются ограничения на величину потенциала, величину его производной и на асимптотическое поведение потенциала в нуле и при больших r .

Метод решения системы уравнений Фредгольма второго рода и соответствующий алгоритм могут быть применены также к решению систем уравнений Фредгольма первого рода, а следовательно, могут быть использованы для других задач фундаментальных и прикладных исследований.

Список литературы

1. Yaman F., Yakhno V.G., Potthast R. A Survey on inverse problems for applied sciences // *Mathematical Problems in Engineering*. 2013. Vol. 2013. P. 976837.
2. Review on solving the inverse problem in EEG source analysis / R. Grech, T. Cassar, J. Muscat, K. P. Camilleri, S.G. Fabri, M. Zervakis, P. Xanthopoulos, V. Sakkalis, B. Vanrumste // *Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation*. 2008. Vol. 5. P. 25.
3. Bonnet M., Constantinescu A. Inverse problem in elasticity // *Inverse Problems*. 2005. Vol. 21. P. R1 – R50.
4. Кочура Е. П., Родионов А. А., Соболев С. В. Взаимодействие ступенчатого импульса с непрерывно-неоднородной электропроводной средой (численный расчет) // *Известия Курского государственного технического университета*. 2004. № 2. С. 41–43.
5. Kochura E. P., Sobolev S. V. On the process of interaction of delta-like electromagnetic pulse with homogeneous electroconductive half-space // *Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Физика и химия*. 2012. № 2. С. 104–107.
6. Тейлор Дж. Теория рассеяния. М.: Мир, 1975. 565 с.
7. Agranovich Z. S., Marchenko V. A. The inverse problem of scattering theory. New York: Gordon and Breach, 1963. 290 p.
8. Braun M., Sofianos S. A., Leeb H. Multi-channel inverse scattering problem on the line: thresholds and bound states // *Physical Review A*. 2003. Vol. 68. P. 012719-1–012719-8.
9. Blazek M. On a method for solving the inverse problem in potential scattering // *Communications in Mathematical Physics*. 1966. Vol. 3. P. 282–291.

10. Knyr V. A., Neudatchin V. G., Khokhlov N. A. Relativistic optical model on the basis of the Moscow potential and lower phase shifts for nucleon-nucleon scattering at laboratory energies of up to 3 GeV // *Physics of Atomic Nuclei*. 2006. Vol. 69, No. 12. P. 2034–2044.
11. Khokhlov N. A., Knyr V. A. Reconstruction of the optical potential from scattering data // *Physical Review C*. 2006. Vol. 73. P. 024004-1–024004-11.
12. Хохлов Н. А. Электродинамика двухнуклонных систем в точечной форме релятивистской квантовой механики: монография. Хабаровск: Изд-во ТОГУ, 2011. 182 с.
13. Chadan K., Sabatier P. C. Inverse problems i quantum scattering theory. New York: Springer, 1989. 325 p.
14. Newton R. G. Scattering theory of waves and particles. New York: Springer, 1982. 627 p.
15. Khokhlov N. A., Studenikina L. I. Energy-independent complex 1S_0 NN potential from the Marchenko equation // *Phys. Rev. C*. 2021. Vol. 104. P. 014001.
16. Quantum inversion: theory and applications // *Lecture Notes in Physics*. Vol. 427; ed. by H. V. von Geramb [et al.]. Berlin: Springer Verlag, 1994. P. 285.
17. One-dimensional inverse scattering problem in acoustics / D. Gerogiannis, S. A. Sofianos, I. E. Lagaris, G. A. Evangelakis // *Brazilian Journal of Physics*. 2011. Vol. 41. P. 248–257.
18. A Marchenko equation for acoustic inverse source problems / J. Van Der Neut, J. L. Johnson, K. Van Wijk, S. Singh, E. Slob, K. Wapenaar // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2017. Vol. 141. P. 4332–4345.
19. Sabatier P. C. Past and future of inverse problems // *Journal of Mathematical Physics*. 2000. Vol. 41. P. 4082–4101.

References

1. Yaman F., Yakhno V.G., Potthast R. A Survey on inverse problems for applied sciences. *Mathematical Problems in Engeneering*, 2013, vol. 2013, pp. 976837.
2. Grech R., Cassar T., Muscat J., Camilleri K.P., Fabri S.G., Zervakis M., Xanthopoulos P., Sakkalis V., Vanrumste B. Review on solving the inverse problem in EEG source analysis. *Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation*, 2008, vol. 5, pp. 25.
3. Bonnet M., Constantinescu A. Inverse problem in elasticity. *Inverse Problems*, 2005, vol. 21, pp. R1–R50.
4. Kochura E. P., Rodionov A. A., Sobolev S. V. Vzaimodeistvie stupenchatogo impul'sa s nepreryvno-neodnorodnoi elektropro-vodnoi sredoi (chislennyi raschet) [Interaction of a step pulse with a continuously inhomogeneous electrically conductive medium (numerical calculation)]. *Izvestiya Kurskogo gosudarstvennogo technicheskogo universiteta = Proceedings of Kursk State Technical University*, 2004, no. 2, p. 41.

5. Kochura E. P., Sobolev S. V. On the process of interaction of delta-like electromagnetic pulse with homogeneous electroconductive half-space. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika i Khimiya = Proceedings of the Southwest State University. Series: Physics and Chemistry*, 2012, no. 2, pp. 104–107.
6. Taylor J. *Teoriya rasseyaniya [Scattering theory]*. Moscow, Mir Publ., 1975. 565 p.
7. Agranovich Z. S., Marchenko V. A. *The inverse problem of scattering theory*. New York, Gordon and Breach Publ., 1963. 290 p.
8. Braun M., Sofianos S. A., Leeb H. Multi-channel inverse scattering problem on the line: thresholds and bound states. *Physical Review A*, 2003, vol. 68, pp. 012719-1–012719-8).
9. Blazek M. On a method for solving the inverse problem in potential scattering. *Communications in Mathematical Physics*, 1966, vol. 3, pp. 282–291.
10. Knyr V. A., Neudatchin V. G., Khokhlov N. A. Relativistic optical model on the basis of the Moscow potential and lower phase shifts for nucleon-nucleon scattering at laboratory energies of up to 3 GeV. *Physics of Atomic Nuclei*, 2006, vol. 69, no. 12, pp. 2034–2044.
11. Khokhlov N. A., Knyr V. A. Reconstruction of the optical potential from scattering data. *Physical Review C*, 2006, vol. 73, pp. 024004-1–024004-11.
12. Khokhlov N. A. *Elektrodinamika dvukhnuklonnykh sistem v tochechnoi forme relyativistskoi kvantovoi mekhaniki [Two nucleons system electrodynamics in point form of relativistic quantum mechanics]*. Khabarovsk, Pacific National Univ. Publ., 2011. 182 p.
13. Chadan K., Sabatier P. C. *Inverse problems i quantum scattering theory*. New York, Springer Publ., 1989, 325 p.
14. Newton R. G. *Scattering theory of waves and particles*. New York, Springer Publ., 1982. 627 p.
15. Khokhlov N. A., Studenikina L. I. Energy-independent complex 1S_0 NN potential from the Marchenko equation. *Phys. Rev. C*, 2021, vol. 104, pp. 014001.
16. von Geramb H. V., Kohlhoff H. Quantum inversion: theory and applications in Lecture. *Notes in Physics* 427, ed. by H. V. von Geramb. Berlin, Springer Verlag Publ., 1994, p. 285.
17. Gerogiannis D., Sofianos S. A., Lagaris I. E., Evangelakis G. A. One-dimensional inverse scattering problem in acoustics. *Brazilian Journal of Physics*, 2011, vol. 41, pp. 248–257.
18. Van Der Neut J., Johnson J. L., Van Wijk K., Singh S., Slob E., Wapenaar K. A Marchenko equation for acoustic inverse source problems. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2017, vol 141, pp. 4332–4345.
19. Sabatier P. C. Past and future of inverse problems. *Journal of Mathematical Physics*, 2000, vol. 41, pp. 4082–4101.

Информация об авторах / Information about the Authors

Хохлов Николай Александрович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики, Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Российская Федерация, e-mail: nikolakhokhlov@yandex.ru, ORCID: 0000-0001-7735-5393

Nicolay A. Khokhlov, Dr. of Sci. (Physics and Mathematics), Head of Higher Mathematics Department, Southwest State University, Kursk, Russian Federation
e-mail: nikolakhokhlov@yandex.ru
ORCID: 0000-0001-7735-5393

Кочура Евгения Павловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры программной инженерии, Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Российская Федерация, e-mail: ekochura@mail.ru, ORCID: 0000-0001-7735-5393

Evgeniay P. Kochura, Cand. of Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Programm Engineering Department, Southwest State University, Kursk, Russian Federation, e-mail: ekochura@mail.ru, ORCID: 0000-0001-7735-5393

Крамарь Елена Ивановна, старший преподаватель кафедры физики, Тихоокеанский государственный университет, г. Хабаровск, Российская Федерация, e-mail: kramar@mail.ru

Elena A. Kramar, Senior lecturer of Physics Department, Pacific National University, Khabarovsk, Russian Federation
e-mail: kramar@mail.ru

Дрейзин Валерий Элеazarович, доктор технических наук, профессор, Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Российская Федерация, e-mail: drejzin_ve@mail.ru, ORCID: 0000-0003-4818-565X

Valery E. Dreyzin, Dr. of Sci. (Engineering), Professor, Southwest State University, Kursk, Russian Federation, e-mail: drejzin_ve@mail.ru, ORCID: 0000-0003-4818-565X