

Оригинальная статья / Original article

УДК 53.098+537.634+681.584

<https://doi.org/10.21869/2223-1528-2025-15-1-161-176>

Нелинейные восприимчивости ансамбля дипольных ротаторов в вязкоупругой жидкости

В.В. Русаков^{1,2}, Ю.Л. Райхер¹✉

¹ Пермский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук
ул. Академика Королева, д. 1, г. Пермь 614013, Российская Федерация

² Пермский национальный исследовательский политехнический университет
Комсомольский пр-т, д. 29, г. Пермь 614990, Российская Федерация

✉ e-mail: raikher@icmm.ru

Резюме

Цель. Моделью ферроколлоида служит ансамбль наночастиц, обладающих «вмороженными» дипольными моментами; применительно к феррочастицам это означает их однодоменность и высокую магнитную жёсткость. Рассматриваемые частицы обладают только одной вращательной степенью свободы (ротаторы). Указанное приближение существенно упрощает математическое описание магнитодинамических процессов, но сохраняет полное качественное сходство результатов с теми, что гораздо более сложным путём можно было бы получить для реальной системы, где частицам доступны две вращательные степени свободы. Для описания вязкоупругой среды, в которой взвешены частицы, выбрана реологическая схема Джеффриса. Магнитодинамический отклик рассмотрен в рамках кинетического подхода – использовано уравнение типа Фоккера – Планка, описывающее ориентационное движение наночастицы в присутствии тепловых флуктуаций. Для решения задачи кинетическое уравнение преобразовано в систему моментно точно использовать лишь небольшое число первых уравнений моментной системы.

Результаты. Спектры первой и третьей гармоник дипольного отклика (намагниченность) рассчитаны в широком диапазоне материальных параметров и частоты. Для этих же условий найдены спектры второй гармоники и статической компоненты квадрупольного отклика (индуцированной ориентационной анизотропии). Показано, что в системах с высоким уровнем динамической упругости имеется частотный интервал, внутри которого статическая составляющая квадрупольного отклика принимает отрицательные значения.

Заключение. Предложен эффективный метод расчётов линейной и нелинейных магнитных восприимчивостей модельного ферроколлоида. Инверсия знака постоянной компоненты квадрупольного отклика (для линейно-вязких жидкостей она отсутствует) является индикатором («подпись») развитой вязкоупругости.

Ключевые слова: вязкоупругая жидкость; броуновское движение; стохастические уравнения; кинетическое уравнение; микрореология; дипольные ротаторы; магнитные частицы.

Финансирование: Работа выполнена в рамках госбюджетной темы № АААА-А20-120020690030-5.

Конфликт интересов: Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Для цитирования: Русаков В.В., Райхер Ю.Л. Нелинейные восприимчивости ансамбля дипольных ротаторов в вязкоупругой жидкости // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии. 2025. Т. 15, № 1. С. 161–176. <https://doi.org/10.21869/2223-1528-2025-15-1-161-176>.

Поступила в редакцию 03.02.2025

Подписана в печать 28.02.2025

Опубликована 20.03.2025

© Русаков В.В., Райхер Ю.Л., 2025

Nonlinear susceptibility of an ensemble of dipolar rotators in a viscoelastic fluid

Victor V. Rusakov^{1,2}, Yuriy L. Raikher¹✉

¹ Perm Federal Research Center, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
1 Academician Korolyov Str., Perm 614018, Russian Federation

² Perm National Research Polytechnic University
29 Komsomolsky Ave., Perm 614990, Russian Federation

✉ e-mail: raikher@icmm.ru

Abstract

Purpose. To investigate the magnetic and magneto-orientational responses of a nanodisperse ferrocolloid to an external magnetic field under conditions when the carrier fluid is a viscoelastic medium.

Methods. The ferrocolloid is modelled as an ensemble of nanoparticles bearing ‘frozen-in’ dipolar (magnetic) moments. The considered particles possess only a single rotary degree of freedom (rotators). This approximation facilitates considerably the mathematical description yielding, however, the results which are in full qualitative resemblance with those, which could have been obtained via a very cumbersome way for a real system where the particles possess two rotational degrees of freedom. The viscoelastic medium is described with the aid of the Jeffreys rheological scheme. The theoretical framework for magnetodynamics of the ferrocolloid is based on the Fokker-Planck-type kinetic equation that describes the nanoparticle orientational motion in the presence of thermal fluctuations. Solution of the problem is obtained via transforming the kinetic equation in the set of moment ones. It is demonstrated that to obtain the static and dynamic susceptibilities, it suffices to use just a few first ones of the developed set of moment equations.

Results. The spectra of the first and third harmonics of the dipolar response (magnetization) are evaluated in a wide range of material parameters of the system and frequency. The same for the same conditions, the spectra of the second harmonic and static component (orientational anisotropy). It is shown that in the system with a high level of dynamic elasticity there exists a frequency interval within which the static component of quadrupole response becomes negative.

Conclusions. An effective method to calculate the linear and nonlinear magnetic susceptibilities of the model ferrocolloid is proposed. The sign inversion of the static component of the quadrupole response – it is identically absent in linearly-viscous fluids – turns out to be an indicator (“signature”) of pronounced viscoelasticity.

Keywords: viscoelastic fluid; Brownian motion; stochastic equations; kinetic equation; microrheology; dipolar rotators; magnetic particles.

Funding: The work was carried out within the framework of the state-budget financed theme No. AAAA-A20-120020690030-5.

Conflict of interest: The authors declare no apparent or potential conflicts of interest related to the publication of this article.

For citation: Rusakov V.V., Raikher Yu.L. Nonlinear susceptibility of an ensemble of dipolar rotators in a viscoelastic fluid. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Tekhnika i tekhnologii = Proceedings of the Southwest State University. Series: Engineering and Technologies*. 2025;15(1):161–176. (In Russ.) <https://doi.org/10.21869/2223-1528-2025-15-1-161-176>.

Received 03.02.2025

Accepted 28.02.2025

Published 20.03.2025

Введение

Термофлуктуационная диффузия малых частиц в сложных жидкостях – это область, пользующаяся неослабевающим вниманием исследователей. Броуновское движение, как неотъемлемый и повсеместно встречающийся процесс, имеет

огромное значение как для фундаментальных исследований в физике дисперсных систем, так и для практики. Диффузия микро- и наночастиц играет ключевую роль в таких областях, как физическая химия, химическая технология, материаловедение неорганических композитов и полимеров и многих других. Кроме того,

диффузионный массоперенос является ключевым как для понимания функционирования клеток и тканей, так и для организации процессов в биотехнологии. Хотя теория броуновского движения в классических (линейно вязких) средах хорошо разработана, она оказывается недостаточной для понимания процессов в сложных системах. Имеются как минимум три причины, которые стимулируют создание обобщённой теории. Во-первых, такая теория необходима для описания движения молекул и наночастиц в текучих средах органического и биологического происхождения. Во-вторых, она требуется для интерпретации данных, получаемых при использовании броуновских частиц микронного размера для пассивной (регистрация теплового движения частиц-зондов) [1] или активной (регистрация вынужденного движения частиц во внешнем поле) [2] для микрореологии или же в пассивном [3] и активном [4] вариантах такого же зондирования, но при использовании наночастиц. В-третьих, теория важна для решения задач гипертермии – расчёта тепловыделения, возникающего при вынужденном вращении частиц в сложных средах [5], оптимизации этого эффекта по параметрам частиц [6] и по выбору частотного диапазона [7].

«Активные» разновидности методов микро- и нанореологии (т. е. те, где движение частиц возбуждается за счёт приложенных извне полей) и метод гипертермии имеют много общего. В обоих случаях броуновские частицы, обладающие дипольным моментом, подвергаются воздействию внешнего поля. Полезный эффект достигается за счёт реакции системы на приложенное поле. Различие заключается в характере этой реакции: в одном случае интерес представляет механический отклик (микрореология), а в другом – тепловой (гипертермия).

Броуновское движение в неньютоновских (вязкоупругих) жидкостях представляет собой сложную задачу как с точки зрения теоретического описания [8], так и в плане экспериментального исследования [9]. В отличие от жидкостей ньютонова типа, где вязкость является постоянной величиной, вязкоупругие среды обладают сложной реологией и проявляют как вязкие, так и упругие свойства. Это приводит к тому, что поведение малых частиц в таких средах существенно отличается от классического случая [10].

В большинстве теоретических работ, объясняющих данные конкретных экспериментов по наблюдению движения малых частиц в сложных жидкостях, упор делается на специализацию используемой реологии для рассматриваемой среды. В данной работе выбран альтернативный подход. В качестве основы используется достаточно простая и корректная модель вязкоупругой среды, заимствованная из общепринятой феноменологии, которая включает минимальное число материальных параметров – жидкость Джеффриса (см. [11] или [12]). На этой базе разрабатывается последовательная теория, расширяющая представления об ориентационном броуновском движении в ньютоновой жидкости. Несмотря на некоторую упрощённость описания этот феноменологический подход обладает неоспоримыми преимуществами – удобством применения и качественной достоверностью. Кроме того, указанная модель удобна для обобщения на реологические схемы с большим числом параметров и тем самым открывает возможность достижения более точного соответствия экспериментальным данным. Безусловно, из-за своей простоты теория не может претендовать на универсальное описание любых разновидностей вязкоупругих свойств. Например, она не подходит для случаев, где значительную роль играет фрактальная диффузия. Од-

нако для систем с вязкоупругостью «максвеллового» типа предложенная модель оказывается удобной и практичной.

Материалы и методы

Ориентационное броуновское движение в вязкоупругой среде

Поскольку для нанодисперсных систем инерционные эффекты малосущественны, для постановки задачи достаточно ограничиться безынерционным приближением. Дальнейшее упрощение заключается в переходе от трёхмерных частиц (две ориентационных степени свободы) к двумерным – дипольным ротаторам, т. е. тонких дисков, которые могут вращаться только в одной, собственной плоскости (одна ориентационная степень свободы). Такая замена, конечно, вносит некоторую ошибку в результаты. Однако указанное сокращение числа степеней свободы оставляет без изменения все основные качественные особенности рассматриваемых релаксационного и/или колебательных процессов [13]. Отличия от полного случая заключаются в нерадикальной перенормировке числовых коэффициентов решения. В то же время переход к ротаторам чрезвычайно упрощает проведение вычислений, которые (см. ниже) даже в этом случае вполне нетривиальны.

Теоретическое описание ориентационного движения наночастицы, находящейся в вязкоупругой среде, основывается на модели Джеффриса [11]. Выбор этой модели объясняется её простотой и надёжностью: данная реологическая схема позволяет осуществить последовательный переход от макроскопической к стохастической (броуновской) динамике частицы и избежать артефактов, возникающих при использовании вязкоупругой модели Максвелла. Эти артефакты были впервые выявлены в работе [14], их причина более строго рассмотрена в [15]. В

рамках модели Джеффриса (см. реологические схемы на рис. 1) вязкоупругая среда рассматривается как «смесь» двух типов жидкостей – ньютоновой и максвелловой, так что трём феноменологическим параметрам, описывающим её свойства, удаётся приписать простой физический смысл.

Коэффициент вязкости η_N обычно связывают с низкомолекулярной (ньютоновой) составляющей жидкости Джеффриса, а коэффициент η_M – к её высокомолекулярной (максвелловой) составляющей. Из естественного условия $\eta_N \ll \eta_M$ вытекает, что реакция частицы на внешнее воздействие представляет собой комбинацию быстрой и медленной компонент, имеющих существенно разные временные масштабы. Модуль упругости G (рис. 1) отражает упругие свойства полимерной сетки зацеплений, при этом необратимая деформация этой сетки определяется коэффициентом максвелловой вязкости η_M .

Система уравнений Ланжевена, описывающая одномерное вращательное движение дипольной частицы (её инерцией пренебрегается) в жидкости Джеффриса при наличии внешнего потенциала имеет вид [16]

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{1}{\zeta_N} \left[- \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + Q + y_N(t) \right], \\ \dot{Q} &= -\tilde{\gamma} Q + \gamma_N \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \\ &+ \kappa_M \left[\frac{y_M(t)}{\zeta_M} - \frac{y_N(t)}{\zeta_N} \right], \\ \langle y_\alpha(t) y_\beta(t + \tau) \rangle &= 2T \zeta_\alpha \delta(\tau) \delta_{\alpha\beta}, \\ &\alpha, \beta = N, M, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\gamma_N \equiv 1/\tau_N = \kappa_M/\zeta_N$ и $\tilde{\gamma} \equiv \gamma_N + \gamma_M = \gamma_M(1 + q)$. Динамическими переменными системы (1) являются: θ – угол ориентации «вмороженного» дипольного момента ротатора; Q – вязкоупругий момент сил трения. В уравнениях (1): U – потенциальная энергия диполя во внешнем

поле; ζ_N и ζ_M – коэффициенты вращательного трения в «ньютоновой» и «максвелловой» цепях реологической схемы Джеффриса; $y_N(t)$ и $y_M(t)$ – моменты случайных сил, обусловленные тепловым движением в каждой из этих цепей. Величина κ_M означает коэффициент упругости схемы Джеффриса. Указанные коэффициенты выражаются через материальные параметры модельной жидкости следующим образом:

$$\zeta_N = 6\eta_N V, \quad \zeta_M = 6\eta_M V, \quad \kappa_M = 6GV, \quad (2)$$

где V – характерный объём частицы. В принципе для анизометричных частиц величина V представляет собой произведение истинного объёма частицы на некоторый формфактор, повышающий коэффициент вращательного сопротивления. Здесь для простоты эта зависимость не учитывается.

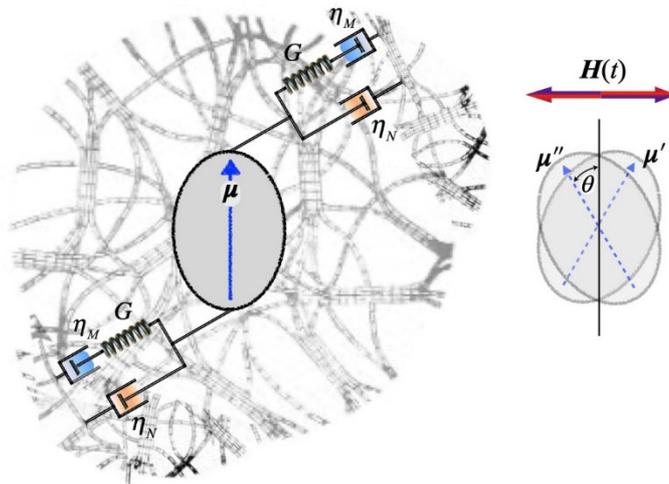


Рис. 1. Схематическое представление магнитной частицы в вязкоупругой жидкости как дипольного ротатора в среде, реология которой описывается моделью Джеффриса

Fig. 1. Schematic view of a magnetic particle in a viscoelastic fluid as a dipolar rotator embedded in a medium which rheology is rendered by the Jeffreys model

Использование стандартной методики [17] для вывода кинетического уравнения даёт уравнение типа Фоккера – Планка для функции $W(\theta, Q, t)$ распределения угловой переменной и момента сил трения

$$\dot{W} = \left[\frac{1}{\zeta_N} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial Q} \right) W \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial Q} \right) + \frac{1}{\zeta_M} \frac{\partial}{\partial Q} W \frac{\partial}{\partial Q} \right] \cdot \left(U + \frac{Q^2}{2\kappa_M} + T \ln W \right). \quad (3)$$

Легко проверить, что равновесным решением уравнения (3) является обобщённое распределение Больцмана

$$W_0(\theta, Q) \propto \exp \left[-\frac{1}{T} \left(U(\theta) + \frac{Q^2}{2\kappa_M} \right) \right]. \quad (4)$$

Из формулы (4) следует, в частности, что в равновесии фазовые переменные функции W статистически независимы. Для частицы с магнитным моментом (диполя) μ потенциал, входящий в уравнения (1) и (3), – это энергия Зеемана в приложенном поле \mathbf{H} :

$$U = -\mu H \cos \theta. \quad (5)$$

Величина μ вектора μ предполагается постоянной, т. е. частице приписывается очень большая энергия одноосной магнитной анизотропии.

В статистическом описании наблюдаемыми (измеряемыми) величинами являются средние значения фазовых переменных и/или функция от них. Для некоторой

величины ψ указанное среднее вычисляется согласно формуле

$$\langle \psi(x) \rangle(t) = \int d\theta \int dQ W(\theta, Q, t) \psi(x, \theta, Q), \quad (6)$$

где x – внешние параметры. В случае магнитных частиц внешним параметром является напряжённость \mathbf{H} внешнего магнитного поля. Интегралы в (6) распространяются на всю область изменения соответствующих переменных, а именно для плоского вращения это $0 < \theta < 2\pi$ и $-\infty < Q < \infty$, причём по углу выполняются циклические граничные условия: $W(0, Q) = W(2\pi, Q)$. По фазовой переменной Q граничные условия однородны: $W(\theta, \pm\infty) = 0$.

Умножение уравнения (3) на функцию $\psi(x, \theta, Q)$ после интегрирования по всему фазовому пространству системы с учётом циклическости функции распределения по углу и однородности граничных условий по переменной Q после приведения к безразмерной форме даёт

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t'} - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \alpha\beta \left(z \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right) \right] \psi + \sqrt{2\beta} \left(\left(\frac{\partial}{\partial z} - z \right) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = \xi \left(\sin \theta \left(\sqrt{\frac{\beta}{2}} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \psi \right), \quad (7)$$

$$t' = \frac{t}{\tau_D},$$

где $\alpha \equiv 1 + 1/q$; $q = \zeta_M/\zeta_N$ – относительная вязкость; $\beta = \kappa_M/T$ – эффективная упругость; $\xi = \mu H/\mathcal{H}$ – безразмерное магнитное поле. За масштаб времени принято время тепловой диффузии $\tau_D = \zeta_N/T$, а безразмерный момент сил запаздывающего трения с учётом равновесного распределения (4) определен как $z = Q/\sqrt{2\kappa_M T}$.

Поскольку любое выражение в угловых скобках означает его интегрирование

с функцией распределения, то уравнение (7), по существу, представляет собой систему моментных уравнений. Из него, в частности, следует, что в уравнение для момента функции распределения k -го порядка по ξ (т. е. по безразмерной амплитуде поля) в качестве вынуждающей силы будут входить слагаемые, определяемые моментами $k-1$ и меньшего порядка. В исследуемой системе наблюдаемыми и, таким образом, представляющими наибольший интерес величинами являются два момента: $\langle \mathcal{H} \sin \theta \rangle$, определяющий намагниченность, и $\langle \mathcal{H} \sin 2\theta \rangle$, который имеет смысл параметра ориентационного порядка дипольных моментов.

Статические отклики

Пусть на систему действует слабое постоянное поле $\xi \ll 1$. В этом случае функция распределения равновесна и имеет вид (4). Разложение экспоненты по этому малому параметру даёт

$$\langle \mathcal{H} \sin \theta \rangle_{\text{eq}} \simeq \frac{1}{2} \xi \left(1 - \frac{1}{8} \xi^2 \right),$$

$$\langle \mathcal{H} \sin 2\theta \rangle_{\text{eq}} \simeq \frac{1}{8} \xi^2 \left(1 - \frac{1}{6} \xi^2 \right). \quad (8)$$

Намагниченность дисперсной системы, концентрация дипольных частиц в которой равна n , определяется формулой $M = n\mu \langle \mathcal{H} \sin \theta \rangle$. Представление намагниченности через линейную и нелинейные восприимчивости имеет вид разложения по степеням поля:

$$M = n\mu \langle \mathcal{H} \sin \theta \rangle = \chi^{(1)} H + \chi^{(3)} H^3 + \dots,$$

откуда из сравнения с (8) следует, что в равновесии

$$\chi_{\text{eq}}^{(1)} = \frac{n\mu^2}{2T}, \quad \chi_{\text{eq}}^{(3)} = -\frac{n\mu^4}{16T^3}. \quad (9)$$

Параметр ориентационного порядка при разложении по степеням поля имеет вид

$$\langle \mathcal{H} \sin 2\theta \rangle = 2 \langle \mathcal{H} \sin^2 \theta \rangle - 1 = \chi^{(2)} H^2 + \dots,$$

в равновесии

$$\chi_{\text{eq}}^{(2)} = \frac{\mu^2}{8T^2}. \tag{10}$$

В случае произвольной величины поля усреднение с равновесным распределением выполняется с помощью интегрирования по частям и даёт рекуррентное соотношение

$$\langle \mathbb{E} \mathbb{E} \mathbb{E} n \theta \rangle_0 = \frac{1}{2n} \xi \langle \mathbb{E} \mathbb{E} \mathbb{E} (n-1) \theta - \mathbb{E} \mathbb{E} \mathbb{E} (n+1) \theta \rangle_0. \tag{11}$$

Динамические отклики на гармоническое поле

Анализ структуры правой части уравнения (6) и граничных условий для фазовых переменных показывает, что удобным базисом для разложения моментов в функциональные ряды являются комбинации

$$\psi_n^{(p)}(\theta, y) = H_n(y) \times \left[\mathbb{E} \mathbb{E} \mathbb{E} p \theta \cdot \delta_{n,2k} + \sin p \theta \cdot \delta_{n,2k+1} \right], \tag{12}$$

$k, p = 0, 1, 2, \dots$

где $H_n(y)$ – полиномы Эрмита [18], ортогональные на всей действительной оси с весовой функцией $\mathbb{E} \mathbb{E} \mathbb{E} (-y^2)$. Использование известных соотношений для полиномов Эрмита даёт систему уравнений для моментов $R_n^{(p)} = \langle \psi_n^{(p)} \rangle$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t'} + p^2 + n\alpha\beta \right) R_n^{(p)} + \\ & + (-1)^{n+1} p \sqrt{2\beta} \left(n R_{n-1}^{(p)} - \frac{1}{2} R_{n+1}^{(p)} \right) = \\ & = \xi \left[\frac{1}{2} p \left(R_n^{(p-1)} - R_n^{(p+1)} \right) + \right. \\ & \left. + (-1)^n n \sqrt{\frac{1}{2}\beta} \left(R_{n-1}^{(p+1)} - R_{n-1}^{(p-1)} \right) \right]. \tag{13} \end{aligned}$$

Здесь и ниже используется безразмерное время [см. (7)]. Согласно условию нормировки $R_0^{(0)} = \langle 1 \rangle = 1$ динамическая намагниченность системы определяется усреднённой проекцией магнитных моментов частиц на направление зондирующего поля. Эта наблюдаемая величина задается соответствующим моментом – дипольным откликом $\langle \mathbb{E} \mathbb{E} \mathbb{E} \theta \rangle = R_0^{(1)}$. Вто-

рая наблюдаемая величина – квадрупольный отклик определяется моментом $\langle \mathbb{E} \mathbb{E} \mathbb{E} 2\theta \rangle = R_0^{(2)}$.

Из системы моментных уравнений (13) следует, что эффективная упругость β определяет влияние запаздывающего (максвеллова) трения на динамику наблюдаемых моментов. При $\beta \ll 1$ этот релаксационный механизм фактически отключается, и всю релаксацию в системе обеспечивает обычный механизм вязкого (ньютонова) трения.

В настоящей работе рассматриваются отклики системы на гармонический сигнал. Из уравнений (11) следует, что дипольный отклик будет содержать компоненты, пропорциональные нечётным степеням амплитуды поля, а квадрупольный – только чётные. Введём соответствующие обозначения:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2} \xi_0 [e^{-i\omega t} + \mathbb{E} \mathbb{E} \mathbb{E}], \\ R_k^{(1)}(t) &= \frac{1}{2} \xi_0 [R_{1,k} e^{-i\omega t} + \mathbb{E} \mathbb{E} \mathbb{E}] + \\ &+ \left(\frac{1}{2}\right)^3 \xi_0^3 [R_{3,k} e^{-3i\omega t} + \mathbb{E} \mathbb{E} \mathbb{E}] + \dots \\ R_k^{(2)}(t) &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \xi_0^2 \times \\ &\times [R_{2,k} e^{-2i\omega t} + \mathbb{E} \mathbb{E} \mathbb{E} + 2R_{0,k}] + \dots \tag{14} \end{aligned}$$

Результаты и их обсуждение

Линейный дипольный отклик

Подстановка разложений (14) в уравнение (13) в линейном по амплитуде поля приближении приводит к системе алгебраических уравнений, определяющих первую гармонику дипольного отклика:

$$\begin{aligned} & \left(\Gamma_n^{(1)} - i\tilde{\omega} \right) R_{1,n} + \\ & + (-1)^{n+1} \sqrt{2\beta} \left(n R_{1,n-1} - \frac{1}{2} R_{1,n+1} \right) = \\ & = \frac{1}{2} (\delta_{n,0} + \sqrt{2\beta} \delta_{n,1}), \tag{15} \end{aligned}$$

где $\tilde{\omega} = \omega \tau_D$ и $\Gamma_n^{(p)} = p^2 + n\alpha\beta$. Уравнение (15) представляет собой трёхчленное рекуррентное соотношение, которое в компактной форме можно представить в виде

$$A_n X_n + A_n^- X_{n-1} + A_n^+ X_{n+1} = f_n, \quad (16)$$

$$X_n = R_{1,n}, \quad f_n = \frac{1}{2}(\delta_{n,0} + \sqrt{2\beta}\delta_{n,1}).$$

Решение этой системы уравнений ищется методом прогонки (см., например, [19]) при подстановке $X_n = P_n X_{n-1} + c_n$; для коэффициентов прогонки получаются следующие рекуррентные соотношения:

$$P_n = -\frac{A_n^-}{A_n + A_n^+ P_{n+1}},$$

$$c_n = \frac{f_n - A_n^+ c_{n+1}}{A_n + A_n^+ P_{n+1}}. \quad (17)$$

Использование явного вида неоднородной правой части и коэффициентов рекуррентного уравнения (16), а также условия уменьшения моментов по мере роста их номера ($X_N = 0, N \gg 1$) приводит к решениям

$$R_0 = \langle \theta \rangle_\omega = \frac{1}{2[1 - i\tilde{\omega}/(1 - S_1)]},$$

$$S_n = (-1)^n \sqrt{\frac{1}{2}\beta} P_n = \frac{n\beta}{A_n - S_{n+1}} \quad (18)$$

при $S_N = 0$. Число N задаёт количество моментов, участвующих в расчёте; с помощью этого параметра можно контролировать точность вычислений. Как оказалось, во всем диапазоне материальных па-

раметров необходимая точность достигается уже при $N = 10$.

Из общего выражения (18) вытекают асимптотики линейной восприимчивости в предельных случаях большой ($\beta \rightarrow \infty$) и малой ($\beta \rightarrow 0$) динамической упругости системы. В пределе слабой упругости (или высокой температуры), когда $S_1 \approx \beta \rightarrow 0$, из (18) сразу следует обычная дебаевская формула $\chi(\omega)/\chi_{eq}^{(1)} \approx (1 - i\tilde{\omega})^{-1}$. Это означает, что при высоких температурах практически всю релаксацию обеспечивает быстрая диффузия. В обратном пределе ($\beta \gg 1$) большая упругость (или низкие температуры) рекуррентная формула (13) упрощается до $S_1 \approx 1/\alpha = q/(1 + q)$. Подстановка этого выражения в (16) снова приводит к дебаевской форме восприимчивости, но уже с другим, в $(1 + q)$ раз бóльшим временем релаксации: $\chi(\omega)/\chi_{eq}^{(1)} \approx [1 - i\tilde{\omega}(1 + q)]^{-1}$, что указывает на определяющую роль медленной диффузии.

Рисунок 2 иллюстрирует влияние характеристик вязкоупругости на спектр линейной восприимчивости. Параметр q задаёт нижнюю границу спектра; по мере роста параметра упругости β спектр перемещается в низкочастотную зону.

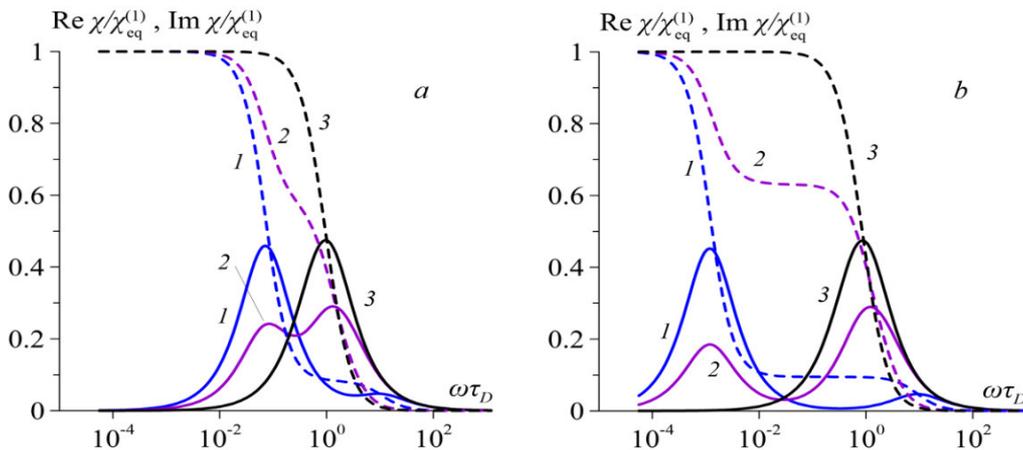


Рис. 2. Частотные зависимости вещественной (штриховые линии) и мнимой (сплошные линии) компонент линейной восприимчивости; относительная вязкость $q = \eta_M/\eta_N$ есть 13 (а) и 750 (б); эффективная упругость $\beta = K/T$ есть 0.1 (1), 1 (2) и 10 (3)

Fig. 2. Frequency dependences of the real (dashes lines) and imaginary (solid lines) components of the linear susceptibility; relative viscosity is $q = \eta_M/\eta_N$ is 13 (a) and 750 (b); effective elasticity $\beta = K/T$ is 0.1 (1), 1 (2) and 10 (3)

Квадратичный отклик

В рассматриваемом случае одномерного движения ротатора отклик параметра ориентационного порядка $\langle \mathbb{P}_2 \rangle$ квадратичен по амплитуде зондирующего поля [см. (10)]. Воздействие гармонического сигнала создаёт его постоянную составляющую (нулевая гармоника) и переменную компоненту на удвоенной частоте (вторая гармоника). Подстановка разложений (14) в уравнение (13) даёт уравнение для второй гармоники квадратичного отклика

$$\begin{aligned} & (\Gamma_n^{(2)} - 2i\tilde{\omega})R_{2,n} + \\ & + (-1)^{n+1}2\sqrt{2\beta} \left(nR_{2,n-1} - \frac{1}{2}R_{2,n+1} \right) = \\ & = F_n \equiv \left(R_{1,n} + (-1)^{n+1}n\sqrt{\frac{\beta}{2}}R_{1,n-1} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, в отличие от системы уравнений моментов первого порядка (14) эта система неоднородна при любом значении индекса n . Для вычисления правой части уравнения (19) необходимы моменты первого порядка, которые выражаются через найденные выше величины по формулам $R_{1,1} = \sqrt{2/\beta} S_1(\frac{1}{2} - R_{1,0})$ и $R_{1,n} = (-1)^n \sqrt{2/\beta} S_n R_{1,n-1}$, $n \geq 2$.

Решение этой системы, как и в случае линейного отклика, находится методом прогонки. Искомая величина (вторая гармоника квадратичного отклика) определяется по формуле

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{P}_2 \rangle_\omega &= R_{2,0} = \\ &= \frac{R_{1,0} - \sqrt{2\beta}a_1(\tilde{\omega}, q, \beta)}{4 - 2i\tilde{\omega} - P_1(\tilde{\omega}, q, \beta)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Входящие в это выражение коэффициенты определяются рекуррентными соотношениями с однородными граничными условиями

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{4n\beta}{\Gamma_n^{(2)} - 2i\tilde{\omega} - P_{n+1}}, \\ a_n &= \frac{P_n}{4n\beta} [F_n + (-1)^{n+1}\sqrt{2\beta}a_{n+1}] \end{aligned} \quad (21)$$

при $P_N = a_N = 0$.

В выражение (21) входит момент первого порядка, а выписанные в явном виде аргументы коэффициентов прогонки подчеркивают их зависимость от частоты и материальных параметров системы. Формулы (21) в сочетании с рекуррентными процедурами (16) позволяют рассчитать частотную зависимость второй гармоники (квадрупольного отклика) для произвольных значений материальных параметров системы. В предельных случаях высоких и низких температур из этих формул легко получаются простые асимптотические выражения. Для высоких температур ($\beta \rightarrow 0$) из представленных выше формул находим, что коэффициенты прогонки, определяющие наблюдаемую величину, имеют следующий порядок малости: $P_1 \sim \beta$, $a_1 \sim \sqrt{\beta}$. Таким образом, для квадрупольного отклика по формуле (19) получаем в главном (нулевом) порядке по β простое выражение [20], из которого следует, что основной вклад в высокотемпературную ориентационную релаксацию вносит ньютоновская вязкость: $R_{2,0} \approx [8(1 - i\tilde{\omega})(1 - \frac{1}{2}i\tilde{\omega})]^{-1}$ ($\beta \rightarrow 0$). В противоположном пределе большой упругости ($\beta \gg 1$), используя асимптотические выражения для коэффициентов прогонки, из формулы (20) следует приближённое выражение для квадрупольного отклика (вторая гармоника) в виде $R_{2,0} \approx \{8[1 - i\tilde{\omega}(1 + q)] \cdot [1 - \frac{1}{2}i\tilde{\omega}(1 + q)]\}^{-1}$. Таким образом, в процессе низкотемпературной релаксации (медленной диффузии) участвуют оба механизма трения, действующие параллельно.

На рисунке 3, где построены графики квадратичной восприимчивости [см. (10)], хорошо различимы оба отмеченных выше предельных случая. Отметим также правильное значение низкочастотной асимптотики, совпадающее со статическим результатом. Для вязкоупругой среды умеренной жёсткости ($\beta \sim 1$) характер частот-

ной зависимости второй гармоники отклика отражает наличие двух механизмов диффузии и переход между ними, задаваемый локализацией частиц в квазиупругом потенциале. Особенно отчётливо это проявляется в частотной зависимости действительной компоненты отклика. Прин-

ципальным отличием от спектров линейного отклика для случая значительной упругости следует считать появление области частот, в которой действительная часть квадратичного отклика принимает отрицательные значения.

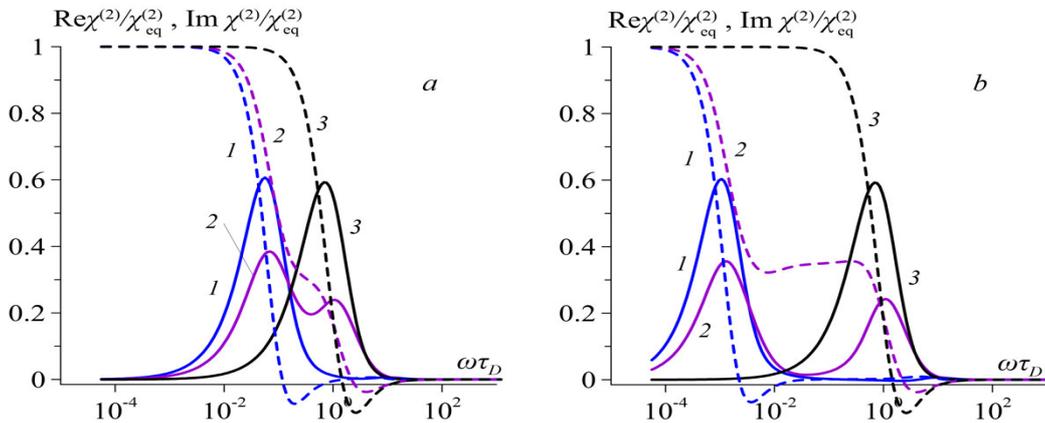


Рис. 3. Частотные зависимости вещественной (штриховые линии) и мнимой (сплошные линии) компонент динамической восприимчивости $\chi^{(2)}$ (гармоника 2ω) квадратичного отклика; относительная вязкость $q = \eta_M/\eta_N$ есть 13 (а) и 750 (б); эффективная упругость $\beta = K/T$ есть 0.1 (1), 1 (2) и 10 (3)

Fig. 3. Frequency dependences of the real (dashes lines) and imaginary (solid lines) components of dynamic susceptibility $\chi^{(2)}$ (2ω -harmonic) of the quadratic response; relative viscosity is $q = \eta_M/\eta_N$ is 13 (a) and 750 (b); effective elasticity $\beta = K/T$ is 0.1 (1), 1 (2) and 10 (3)

Характерной особенностью спектра мнимых частей как линейной восприимчивости, так и квадратичного отклика является фиксированное положение низкочастотного максимума, обусловленного медленной диффузией – с ростом температуры уменьшается только его амплитуда. В целом указанные частотные зависимости весьма схожи.

Статическая компонента квадратичного отклика

Система уравнений для статической компоненты квадратичного отклика получается из уравнений (19). Для этого в их левой части нужно положить $\omega = 0$, а в правой – произвести очевидную замену $F_n \rightarrow R\bar{\mathbb{E}}(F_n)$. Применение метода прогонки к полученной таким образом системе даёт для искомого отклика

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{E} \rangle_{\omega} &= R_{0,0} = \\ &= \frac{R\bar{\mathbb{E}}(R_{1,0} - \sqrt{2\beta}a_1)}{4 - R\bar{\mathbb{E}}(P_1)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Входящие в это выражение коэффициенты определяются рекуррентными соотношениями с однородными граничными условиями

$$\begin{aligned} R\bar{\mathbb{E}}(P_n) &= \frac{4n\beta}{\Gamma_n^{(2)} - R\bar{\mathbb{E}}(P_{n+1})}, \\ R\bar{\mathbb{E}}(a_n) &= \frac{R\bar{\mathbb{E}}(P_n)}{4n\beta} R\bar{\mathbb{E}} \times \\ &\times (F_n + (-1)^{n+1} \sqrt{2\beta}a_{n+1}), \\ R\bar{\mathbb{E}}(P_N) &= R\bar{\mathbb{E}}(a_N) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Эволюция частотных зависимостей статической компоненты в зависимости от параметров вязкоупругости хорошо отслеживается на графиках (рис. 4).

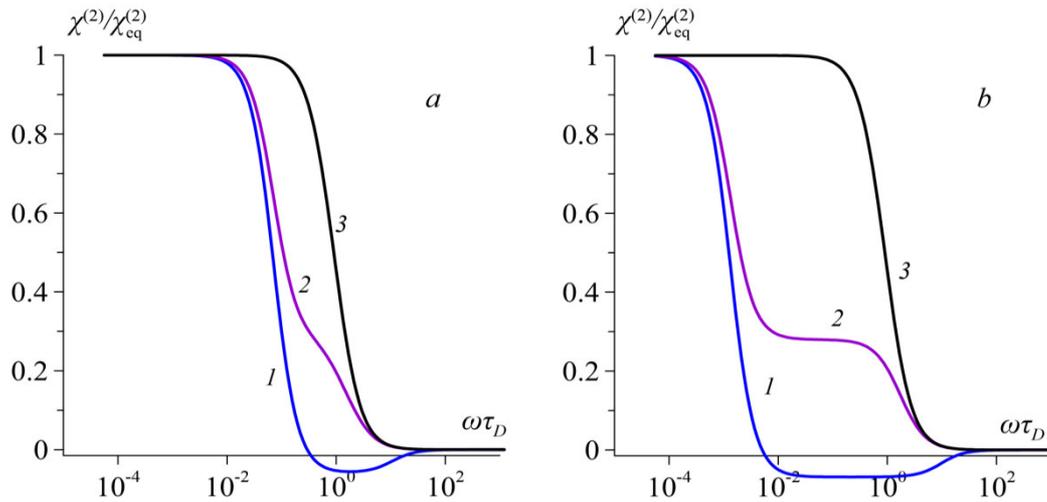


Рис. 4. Частотные зависимости статической компоненты $\chi_0^{(2)}$ (нулевая гармоника) квадратичной восприимчивости; относительная вязкость $q = \eta_M/\eta_N$ есть 13 (а) и 750 (б); эффективная упругость $\beta = K/T$ есть 0.1 (1), 1 (2) и 10 (3)

Fig. 4. Frequency dependences of the static component $\chi_0^{(2)}$ (zero harmonic) of the quadratic susceptibility; relative viscosity is $q = \eta_M/\eta_N$ is 13 (a) and 750 (b); effective elasticity $\beta = K/T$ is 0.1 (1), 1 (2) and 10 (3)

Кубический отклик

Расчёт третьей гармоники дипольного отклика необходим для анализа результатов измерений нелинейной восприимчивости; кубический вклад – первый и максимальный (после линейного) при разложении получаемого сигнала (намагниченность, поляризация) по амплитуде зондирующего поля. Для решения этой задачи необходимо произвести в рекуррентных соотношениях (17) замену

$$A_n = \Gamma_n^{(1)} - 3i\tilde{\omega},$$

$$f_n = -\frac{1}{2}R_{2,n} + (-1)^n n \sqrt{\frac{\beta}{2}} R_{2,n-1}, \quad (24)$$

тогда искомая гармоника находится по формулам

$$\langle \text{Re } 3\theta \rangle_\omega = R_{3,0} =$$

$$= -\left(\frac{1}{2}\right) \frac{R_{2,0} + \sqrt{2\beta} a_1(3)}{1 - 3i\tilde{\omega} - S_1(3)},$$

$$S_n(3) = \frac{n\beta}{1 - 3i\tilde{\omega} - S_1(3)},$$

$$a_n(3) = -\frac{f_n + (-1)^{n+1} \sqrt{\beta/2} a_{n+1}}{1 - 3i\tilde{\omega} - S_{n+1}(3)},$$

$$S_N(0) = a_N(0) = 0. \quad (25)$$

Результаты расчёта компонент динамической магнитной восприимчивости третьего порядка [см. (9)], т. е. частотные зависимости комплексной амплитуды третьей гармоники намагниченности, представлены на рисунке 5. На них хорошо различима низкочастотная асимптотика (4). Предельные случаи высокой и низкой упругости приводят к простой дебаевской форме спектра с соответствующими временами релаксации. В случае малой упругости (высокая температура) доминирует быстрая диффузия с характерным временем τ_D , а при низкой температуре происходит медленная релаксация, задаваемая временем $\tau_D(1 + q)$. Оба механизма релаксации проявляются при умеренной упругости в виде минимумов на соответствующих частотах. Для системы с большим значением параметра q переход между этими минимумами оказывается немонотонным.

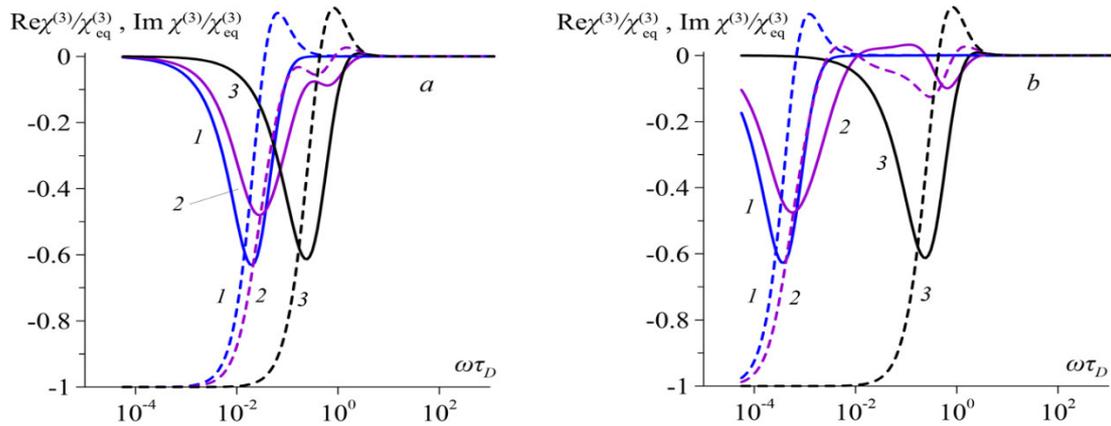


Рис. 5. Частотные зависимости кубической компоненты магнитной восприимчивости; относительная вязкость $q = \eta_M/\eta_N$ есть 13 (а) и 750 (б); эффективная упругость $\beta = K/T$ есть 0.1 (1), 1 (2) и 10 (3)

Fig. 5. Frequency dependences of the cubic component of the magnetic susceptibility; relative viscosity is $q = \eta_M/\eta_N$ is 13 (a) and 750 (b); effective elasticity $\beta = K/T$ is 0.1 (1), 1 (2) and 10 (3)

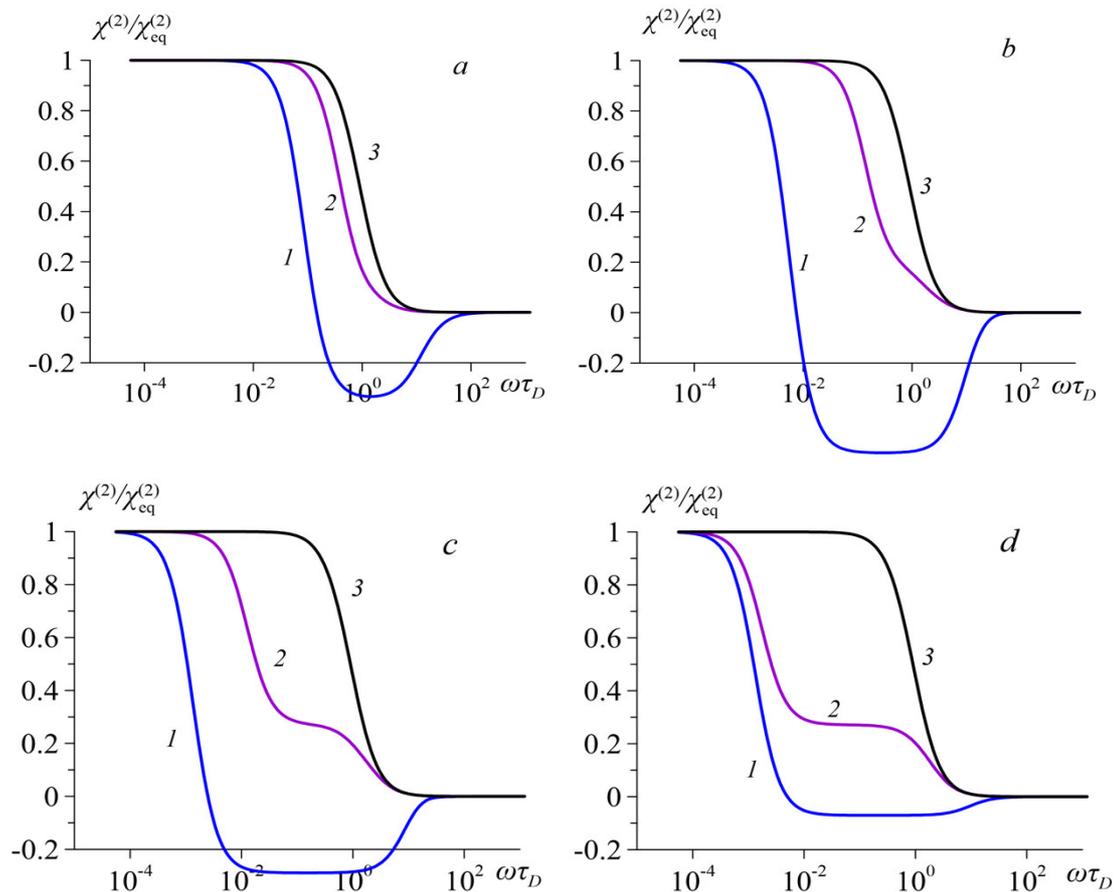


Рис. 6. Частотные зависимости статической компоненты $\chi_0^{(2)}$ (нулевая гармоника) квадратичной восприимчивости при вариации параметра прогонки $N = 1$ (а), 2 (б), 4 (с), 6 (д); относительная вязкость $q = \eta_M/\eta_N = 750$; эффективная упругость $\beta = K/T$ есть 0.1 (1), 1 (2) и 10 (3)

Fig. 6. Frequency dependences of the static component $\chi_0^{(2)}$ (zero harmonic) of the quadratic susceptibility under variation of the sweep parameter $N = 1$ (a), 2 (b), 4 (c), 6 (d); relative viscosity is $q = \eta_M/\eta_N = 750$; effective elasticity $\beta = K/T$ is 0.1 (1), 1 (2) and 10 (3)

Рисунок 6 иллюстрирует удобство предложенного метода решения, здесь приведены результаты расчёта спектра статической компоненты квадратичной восприимчивости при различных значениях параметра прогонки. Эти графики указывают на быструю сходимость вычислительной процедуры по мере роста этого параметра

Действительно, кривые, полученные при $N = 6$, уже практически не отличаются от линий (см. рис. 4), рассчитанных при $N = 10$. Важно также подчеркнуть, что эффект перемены знака статической компоненты, имеющий место уже в приближении среднего поля [21], обнаруживается и при высокоточном расчёте, как это показано на рисунке 4.

Выводы

Выполненное рассмотрение показало, что предложенная модель вязкоупругого

ферроколлоида позволяет относительно просто находить линейную и нелинейные магнитные и магнитоориентационные восприимчивости любого порядка, гарантируя необходимую точность расчёта. В широком диапазоне материальных параметров рассчитаны спектры первой и третьей гармоник дипольного отклика (намагниченность). Для квадратичного отклика (параметр ориентационного порядка) найдены спектры его второй гармоники и статической компоненты. Показано, что в системах со значительным уровнем динамической упругости статическая составляющая квадратичного отклика в определенном диапазоне частот принимает отрицательные значения. Указанный эффект – это отличительная черта («подпись») развитой вязкоупругости. Выбранный метод вычислений имеет быструю сходимость; результаты для амплитуд других гармоник аналогичны.

Список литературы

1. Waigh T.A. Advances in the microrheology of complex fluids // Reports on Progress in Physics. 2016. Vol. 79, no. 7. Art. no. 074601. <https://doi.org/10.1088/0034-4885/79/7/074601>.
2. Microrheology, advances in methods and insights / Q. Xia, H. Xiao, Y. Pan, L. Wang // Advances in Colloid and Interface Science. 2018. Vol. 257. P. 71–85. <https://doi.org/10.1016/j.cis.2018.04.008>.
3. Nanorheology and nanoindentation revealed a softening and an increased viscous fluidity of adherent mammalian cells upon increasing the frequency / V.G. Gisbert, F.M. Espinosa, J.G. Sanchez, M.C. Serrano, R. Garcia // Small. 2024. Vol. 20, no. 6. Art. no. e2304884. <https://doi.org/10.1002/sml.202304884>.
4. Magnetic particle nanorheology / E. Roeben, L. Röeder, S. Teusch, M. Effertz, K.D. Ulrich, A.M. Schmidt // Colloid and Polymer Science. 2014. Vol. 292, no. 8. P. 2013–2023. <https://doi.org/10.1007/s00396-014-3289-6>.
5. Challenges and recommendations for magnetic hyperthermia characterization measurements / J. Wells, D. Ortega, U. Steinhoff, S. Dutz, E. Garaio, O. Sandre [et al.] // International Journal of Hyperthermia. 2021. Vol. 38. P. 447–460. <https://doi.org/10.1080/02656736.2021.1892837>.
6. Yoshida T., Enpuku K. Optimization of excitation field depending on magnetic nanoparticle parameters for magnetic hyperthermia under safety constraint // AIP Advances. 2024. Vol. 14. Art. no. 075105. <https://doi.org/10.1063.5.0208914>.
7. Ultra-high rate of temperature increment from superparamagnetic nanoparticles for highly efficient hyperthermia // J.-H. Lee, B. Kim, Y. Kim, S.-K. Kim // Scientific Reports. 2021. Vol. 11. Art. no. 4969. <https://doi.org/10.1038/s41598-021-84424-1>.

8. Zia R.N., Brady J.F. Theoretical microrheology // *Complex fluids in biological systems. Biological and medical physics, biomedical engineering* / S. Spagnolie (ed.). New York: Springer, 2015. P. 113-157.
9. Furst E.M., Squires T.M. *Microrheology*. Oxford: Oxford University Press, 2017. 451 p.
10. Gardel M., Valentine M., Weitz D. *Microrheology // Microscale diagnostic techniques* / K.S. Breuer (ed.) Berlin: Springer, 2005. P. 1–49.
11. Malkin A.Ya., Isayev A.I. *Rheology: concepts, methods, applications*. Toronto: ChemTech Publ., 2005. 536 p.
12. Oswald P. *Rheophysics: the deformation and flow of matter*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. 640 p.
13. Chaki S., Olsen K.S., Löwen H. Dynamics of a single anisotropic particle under various resetting protocols // *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2025. Vol. 37, no. 11. Art. no. 115101. <https://doi.org/10.1088/1361-648X/ada336>.
14. Райхер Ю.Л., Русаков В.В. Теория броуновского движения в жидкости Джеффриса // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 2010. Т. 138, вып. 5. С. 998–1005. <http://dx.doi.org/10.1134/S1063776110110191>.
15. Rusakov V.V., Raikher Yu.L., Perzynski R. Brownian motion in the fluids with complex rheology // *Mathematical Modeling of Natural Phenomena*. 2015. Vol. 10. P. 1–43. <https://doi.org/10.1051/mmnp/201510401>.
16. Русаков В.В., Райхер Ю.Л. Магнитная релаксация в вязкоупругом ферроколлоиде // *Коллоидный журнал*. 2020. Т. 82, № 2. С. 204–222. <https://doi.org/10.31857/S002329122002010X>.
17. Климонтович Ю.Л. Статистическая теория открытых систем. Т. 3. *Физика квантовых открытых систем*. М.: Янус-К, 1995. 508 с.
18. Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, Д. Липман, А. Мак Ниш [и др.]; под ред. М. Абрамовица и И. Стиган; пер. с англ. под ред. В.А. Диткина и Л.Н. Кармазиной. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. 832 с.
19. Raikher Yu.L., Stepanov V.I. Nonlinear dynamic susceptibilities and field-induced birefringence in magnetic particle assemblies // *Advances in Chemical Physics Series*. New York: Wiley, 2004. P. 419–588. <https://doi.org/10.1002/047168077X.ch4>.
20. Raikher Yu.L., Shliomis M.I. The effective field method in the orientational kinetics of magnetic fluids and liquid crystals // *Advances in chemical physics series: relaxation phenomena in condensed matter* / W. Coffey (ed.) Vol. 87. New York: Wiley, 1994. P. 595–751. <http://dx.doi.org/10.1002/9780470141465.ch8>.
21. Русаков В.В., Райхер Ю.Л. Нелинейный магнитный отклик вязкоупругого ферроколлоида: приближение эффективного поля // *Коллоидный журнал*. 2021. Т. 83, № 1. С. 86–97. <https://doi.org/10.31857/S0023291221010110>.

References

1. Waigh T.A. Advances in the microrheology of complex fluids. *Reports on Progress in Physics*. 2016;79(7):074601. <https://doi.org/10.1088/0034-4885/79/7/074601>.
2. Xia Q., Xiao H., Pan Y., Wang L. Microrheology, advances in methods and insights. *Advances in Colloid and Interface Science*. 2018;257:71–85. <https://doi.org/10.1016/j.cis.2018.04.008>.
3. Gisbert V.G., Espinosa F.M., Sanchez J.G., Serrano M.C., Garcia R. Nanorheology and nanoindentation revealed a softening and an increased viscous fluidity of adherent mammalian cells upon increasing the frequency. *Small*. 2024;20(6):2304884. <https://doi.org/10.1002/smll.202304884>.

4. Roeben E., Röeder L., Teusch S., Effertz M., Ulrich K.D., Schmidt A.M. Magnetic particle nanorheology. *Colloid and Polymer Science*. 2014;292(8):2013–2023. <https://doi.org/10.1007/s00396-014-3289-6>.
5. Wells J., Ortega D., Steinhoff U., Dutz S., Garaio E., Sandre O., et al. Challenges and recommendations for magnetic hyperthermia characterization measurements. *International Journal of Hyperthermia*. 2021;38:447–460. <https://doi.org/10.1080/02656736.2021.1892837>.
6. Yoshida T., Enpuku K. Optimization of excitation field depending on magnetic nanoparticle parameters for magnetic hyperthermia under safety constraint. *AIP Advances*. 2024;14:075105. <https://doi.org/10.1063.5.0208914>.
7. Lee J.-H., Kim B., Kim Y., Kim S.-K. Ultra-high rate of temperature increment from superparamagnetic nanoparticles for highly efficient hyperthermia. *Scientific Reports*. 2021;11:4969. <https://doi.org/10.1038/s41598-021-84424-1>.
8. Zia R.N., Brady J.F. Theoretical microrheology. In: Spagnolie S. (ed.) Complex fluids in biological systems. Biological and medical physics, biomedical engineering. New York: Springer; 2015. P. 113–157. https://doi.org/10.1007/978-1-4939-2065-5_3.
9. Furst E.M., Squires T.M. Microrheology. Oxford: Oxford University Press; 2017. 451 p.
10. Gardel M., Valentine M., Weitz D. Microrheology. In: Breuer K.S. (ed.) Microscale diagnostic techniques. Berlin: Springer; 2005. P. 1–49.
11. Malkin A.Ya., Isayev A.I. Rheology: concepts, methods, applications. Toronto: ChemTech Publ.; 2005. 536 p.
12. Oswald P. Rheophysics: The deformation and flow of matter. Cambridge: Cambridge University Press; 2009. 640 p.
13. Chaki S., Olsen K.S., Löwen H. Dynamics of a single anisotropic particle under various resetting protocols. *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2025;37(11):115101. <https://doi.org/10.1088/1361-648X/ada336>.
14. Reicher Yu.L., Rusakov V.V. Theory of Brownian motion in Jeffries fluid. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2010;111:883–889. <http://dx.doi.org/10.1134/S1063776110110191>.
15. Rusakov V.V., Raikher Yu.L., Perzynski R. Brownian motion in the fluids with complex rheology. *Mathematical Modeling of Natural Phenomena*. 2015;10(4):1–43. <https://doi.org/10.1051/mmnp/201510401>.
16. Rusakov V.V., Reicher Yu.L. Magnetic relaxation in a viscoelastic ferrocolloid. *Colloidal Journal*. 2020;82(2):161–179. <https://doi.org/10.1134/S1061933X20020106>.
17. Klimontovich Yu.L. Statistical theory of open systems. Dordrecht: Kluwer Academic Publ.; 1995.
18. Abramovitz M., Stegun I.A., eds. Handbook of Mathematical Functions. New York, Dover; 1965. 600 p.
19. Raikher Yu.L., Stepanov V.I. Nonlinear dynamic susceptibilities and field-induced birefringence in magnetic particle assemblies. *Advances in Chemical Physics Series*. New York: Wiley; 2004. P. 419–588. <https://doi.org/10.1002/047168077X.ch4>.
20. Raikher Yu.L., Shliomis M.I. The effective field method in the orientational kinetics of magnetic fluids and liquid crystals. In: Coffey W. (ed.) Advances in chemical physics series: relaxation phenomena in condensed matter. Vol. 87. New York: Wiley; 1994. P. 595–751. <http://dx.doi.org/10.1002/9780470141465.ch8>.
21. Rusakov V.V., Reicher Yu.L. Nonlinear magnetic response of a viscoelastic ferrocolloid: an approximation of the effective field. *Colloid Journal*. 2021;83(1):116–126. <https://doi.org/10.1134/S1061933X21010117>.

Информация об авторах / Information about the Authors

Русаков Виктор Владимирович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории динамики дисперсных систем, Пермский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук; Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Российская Федерация, e-mail: vvr@icmm.ru

Райхер Юрий Львович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории динамики дисперсных систем, Пермский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук, г. Пермь, Российская Федерация, e-mail: raikher@icmm.ru, ORCID: 0000-0002-6167-6528

Victor V. Rusakov, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Senior Researcher at the Laboratory of Disperse Systems Dynamics, Perm Federal Research Center of the Ural Branch of Russian Academy of Science; Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation, e-mail: vvr@icmm.ru

Yuriy L. Raikher, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Chief Researcher at the Laboratory of Dynamics of Disperse Systems, Perm Federal Research Center of the Ural Branch of Russian Academy of Science, Perm, Russian Federation, e-mail: raikher@icmm.ru, ORCID: 0000-0002-6167-6528