Оригинальная статья / Original article

УДК 53.098:539.372:539.214
https://doi.org/10.21869/2223-1528-2023-13-4-75-87

Модель магнитоактивного эластомера со структурным параметром

О. В. Столбов[1]✉, Ю. Л. Райхер[1]

[1] Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук – филиал Пермского федерального исследовательского центра Уральского отделения Российской академии наук
ул. Академика Королева, д. 1, г. Пермь 614018, Российская Федерация

✉ e-mail: sov@icmm.ru

Резюме

Цель. *Поиск простого и физически разумного способа описания базовых свойств магнитоактивного эластомера под действием приложенного магнитного поля и/или механической нагрузки.*

Методы. *Предложен феноменологический подход, в рамках которого агрегирование феррочастиц в магнитоактивном эластомере трактуется как появление некоторого параметра порядка, физический смысл которого близок, но не сводится полностью к количеству частиц наполнителя, объединившихся в агрегаты, отнесённому к общему числу частиц. Соответствующий функциональный вклад в свободную энергию системы записан в форме, схожей с разложением Ландау – де Жена, как оно используется в теории фазовых переходов. В зависимости от присутствия кубической степени параметра порядка в этом разложении структурный переход в магнитоактивном эластомере может развиваться по сценариям как I, так и II рода.*

Результаты. *В модельном одномерном расчёте показано, что зависимости главных характеристик композита – намагниченности и деформации – от приложенного магнитного поля и механической нагрузки можно единым образом описать через изменение параметра порядка. Рассмотренная модельная среда проявляет важную особенность: в присутствии внешнего поля она реагирует на приложенную механическую нагрузку квазипластически. Однако, как только поле выключается, система выходит из пластического состояния и восстанавливает исходную упругость.*

Заключение. *Полученные результаты находятся в хорошем согласии с данными прямого численного моделирования мезоскопического варианта рассматриваемой задачи. В качественном отношении выявленные особенности реологического поведения рассмотренной системы находятся в близком соответствии с результатами экспериментов по механическому нагружению магнитоактивных эластомеров на силиконовой основе, наполненных порошком карбонильного железа, частицы которого имеют микронный размер.*

Ключевые слова: *магнитоактивный эластомер; магнитодеформационный эффект; агрегирование феррочастиц; магнитоиндуцированная пластичность; параметр порядка.*

Финансирование. *Работа выполнена в рамках госбюджетной темы № АААА-А20-120020690030-5.*

Конфликт интересов: *Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.*

Для цитирования: Столбов О. В., Райхер Ю. Л. Модель магнитоактивного эластомера со структурным параметром // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии. 2023. Т. 13, № 4. С. 75–87. https://doi.org/10.21869/2223-1528-2023-13-4-75-87.

Поступила в редакцию 23.09.2023 *Подписана в печать 25.10.2023* *Опубликована 25.12.2023*

Model of a Magnetoactive Elastomer with Structure Parameter

Oleg V. Stolbov[1] ✉, Yuriy L. Raikher[1]

[1] Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of Russian Academy of Science
1 Academika Koroleva Str., Perm 614018, Russian Federation

✉ e-mail: sov@icmm.ru

Abstract

Purpose. *To propose a simple and physically reasonable way to describe basic properties of magnetoactive elastomers under the action of magnetic field and/or mechanical loading.*

Methods. *A phenomenological approach is developed, in the framework of which the aggregation of ferroparticles in a magnetoactive elastomer is interpreted as the appearance of an order parameter whose physical meaning resembles, although does not coincide entirely with, the number of the particles dwelling in aggregates normalized by the total number of the particles. The corresponding functional contribution to the free energy of the system is constructed in the form similar to that of the Landau-de Gennes expansion, as it is used in the theory of phase transitions. Depending on the presence of the cubic term in this expansion, the transition may develop along the scenarios of either I or II order.*

Results. *In a model 1D calculation it is shown that the dependences of the main characteristics of the composite, viz. magnetization and deformation, on the applied field and mechanical load, might be in a unified manner described as being entailed by the evolution of the above-introduced order parameter. A specific feature manifested by the model system is its ability to display quasi-plastic response that exists as long as the external field is on, and to get back to elastic behavior as soon as the field is switched off.*

Conclusions. *The results obtained are found to be in good agreement with the data obtained from the direct numerical modelling of the mesoscopic variant of the considered problem. In qualitative aspect, the discovered specific features of the rheological bahavior closely resemble the results of experimental studies om mechanical loading of magnetoactive composites consisting of a silicone rubber filled with micron-size particles of carbonyl iron.*

Keywords: *magnetoactive elastomer; magnetodeformational effect; aggregation of ferroparticles; field-induced plasticity; order parameter.*

Funding: *The work was carried out within the framework of the state-budget financed theme No. AAAA-A20-120020690030-5.*

Conflict of interest*: The authors declare no apparent or potential conflicts of interest related to the publication of this article.*

For citation: Stolbov O. V., Raikher Yu. L. Model of a Magnetoactive Elastomer with Structure Parameter. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Tekhnika i tekhnologii = Proceedings of the Southwest State University. Series: Engineering and Technologies.* 2023; 13(4): 75–87. (In Russ.) https://doi.org/10.21869/2223-1528-2023-13-4-75-87

Received 23.09.2023 *Accepted 25.10.2023* *Published 25.12.2023*

***

Введение

Магнитоактивные эластомеры (МАЭ) – мягкие полимерные матрицы, наполненные микронного размера частицами ферромагнетика – материала, легко деформирующегося под действием внешних магнитных полей и/или приложенных механических нагрузок. Это сочетание свойств определяет высокий прикладной интерес к ним [1–4]: от антисейсмической защиты сооружений [5] до смарт-акустики [6] и дистанционно управляемых манипуляторов [7; 8].

Как правило, под действием внешних воздействий МАЭ проявляют обратимое деформационное поведение. Однако в определённых условиях высококонцентрированные системы, помещённые в достаточно сильное поле, полностью изменяют своё поведение и переходят в состояние, где по своим свойствам становятся подобными пластилину, а именно сохраняют любую приданную форму [9]. Как только магнитное поле выключается, материал восстанавливает свою упругость и тем самым форму. Эффект магнитоиндуцированной пластичности (магнитной памяти формы) легко наблюдаем [9], но при этом труден для теоретического описания. Его происхождение обсуждалось в ряде теоретических работ [11–16], но ни в одной из попыток не удалось описать единым образом два очевидно связанных проявления эффекта: гистерезис зависимости деформации от напряжения и гистерезис зависимости намагниченности от приложенного поля.

Рассматривая совместно экспериментальные наблюдения и результаты мезоскопического моделирования, ниже мы предлагаем феноменологический подход в духе разложения Ландау – де Жена, т. е. рассматриваем изменения внутренней структуры МАЭ в терминах теории фазовых переходов. Хотя представленная модель не содержит описания эффектов запаздывания – для полимерных композитов они, конечно, важны – полученные результаты хорошо согласуются с данными численного моделирования и качественно – с экспериметом.

Материалы и методы

Энергия МАЭ, способного к структурообразованию

Модель МАЭ, способного к структурообразованию, строится в континуальном приближении. За основные термодинамические переменные принимаются: намагниченность M, относительная деформация ε и структурный параметр S, который в некотором интегральном смысле отражает все изменения внутренней (мезоскопической) структуры композита. В предположении, что главные изменения внутренних свойств определяются агрегированием частиц наполнителя, структурный параметр нормируется таким образом, что в композите, где агрегатов нет, $S = 0$, а в ситуации, где все частицы находятся в агрегатах, его значение максимально: $S = 1$. Ввиду того, что под действием приложенного поля частицы имеют тенденцию объединяться в агрегаты, имеющие вытянутую вдоль поля форму, в определение S следовало бы включать и меру их анизометричности. В настоящей 1D-модели, использующей скалярный параметр порядка, этот геометрический фактор в явном виде не учитывается, это будет сделано в дальнейшем при обобщении предлагаемого подхода.

Для зависимости намагниченности M неструктурированного МАЭ от магнитного поля H, действующего внутри материала, принимается закон Фрёлиха – Кеннелли [17]. В скалярном виде он принимает форму

$$M(H) = \frac{\chi_0 H M_s}{M_s + \chi_0 H},$$

или

$$H(M) = \frac{H M M_s}{\chi_0 (M_s - M)}, \qquad (1)$$

где χ_0 – начальная магнитная восприимчивость, а M_s – намагниченность насыщения.

В качестве термодинамического потенциала задачи берётся функция $U = \hat{U} - MH$, где $\hat{U}$ – плотность внутренней энергии. Независимой переменной для функции U является намагниченность, так что магнитная часть этого термодинамического потенциала после подстановки (1) принимает вид

$$U_{\text{magn}} = \int_0^M H(M) dM = \\ = \frac{M_s}{\chi_0}\left[M_s \ln\frac{M_s}{(M_s - M)} - M\right]. \qquad (2)$$

Наряду с магнитным полем внешним контролирующим параметром задачи является также и механическая нагрузка σ. Для простоты создаваемую ею объёмную плотность упругой энергии МАЭ будем описывать законом Гука

$$U_{\mathrm{el}} = \sigma^2/2E_0, \tag{3}$$

где E_0 – «затравочный» модуль Юнга композита в целом, что в предположении о несжимаемости материала определяет и его «затравочный» модуль сдвига $G_0 = E_0/3$. Последнюю величину удобно использовать для обезразмеривания определяющих соотношений. Обозначая $\widetilde{\sigma} = \sigma/G_0$ и $(\widetilde{M}, \widetilde{M}_s) = (M, M_s)/\sqrt{G_0}$, из (2) и (3) получаем

$$\widetilde{U}_{\mathrm{magn}} = \frac{\widetilde{M}_s}{\chi_0}\left[\widetilde{M}_s \ln\frac{\widetilde{M}_s}{(\widetilde{M}_s - \widetilde{M})} - \widetilde{M}\right],$$
$$\widetilde{U}_{\mathrm{el}} = \frac{\sigma^2 G_0}{2E_0 G_0} = \frac{1}{6}\widetilde{\sigma}^2. \tag{4}$$

Как указано выше, качественный смысл структурного параметра S – это доля частиц в единице объёма МАЭ, которые входят в состав кластеров, т. е. имеют в непосредственной близости от себя не менее одного соседа. Предполагая: (1) что структурный параметр изменяется под влиянием внешних воздействий и (2) что эти изменения могут происходить резко – по типу ориентационного фазового перехода – вклад, вносимый структурированием в энергию композита, будем описывать разложением

$$U_{\mathrm{str}} = \tfrac{1}{2}A_2(M^2 - M_c^2)S^2 + \tfrac{1}{3}A_3S^3 + \\ + \tfrac{1}{4}\frac{A_4S^4}{1 - S^4} - \tfrac{1}{2}\alpha S M^2 - \\ - \tfrac{1}{2}\beta(1 + \gamma M^2)S^2\sigma^2, \tag{5}$$

где A_2, A_3, A_4, α, β – материальные константы, три из которых A_2, α, γ безразмерны. Форма слагаемого $\propto S^4$ выбрана таким образом, чтобы за счёт коэффициента A_4 состоянию полной упорядоченности можно было приписать значение $S = 1$.

Отметим, что нелинейное соотношение (5) лишь по форме напоминает одномерный вариант разложения Ландау – де Жена теории жидких кристаллов [18; 19]. Действительно, в (5) возможность перехода в состояние $S \neq 1$ – при этом параметр порядка не имеет прямого смысла как мера ориентации – определяется не температурой (как в оригинальной теории), а достигнутым уровнем намагниченности. Ниже показано, что именно такая форма U_{str} отвечает наблюдаемому поведению МАЭ. Как обычно, наличие слагаемого $\propto S^3$ в (5) сообщает системе возможность менять состояние по сценарию фазового перехода I рода; однако в разделе 4 для начала рассмотрен более простой случай перехода II рода ($A_3 = 0$). Этот пример важен, поскольку, судя по результатам экспериментов, переходы в МАЭ хотя и относятся к типу переходов I рода, но очень близки к II роду.

Суммирование соотношений (2), (3) и (5) даёт плотности полной энергии МАЭ, для безразмерной формы которой имеем

$$\widetilde{U} = \widetilde{U}_{\mathrm{magn}} + \widetilde{U}_{\mathrm{el}} + \tfrac{1}{2}A_2(\widetilde{M}^2 - \widetilde{M}_c^2)S^2 + \\ + \tfrac{1}{3}\widetilde{A}_3S^3 + \tfrac{1}{4}\frac{\widetilde{A}_4S^4}{1 - S^4} - \\ - \tfrac{1}{2}\alpha S\widetilde{M}^2 - \tfrac{1}{2}\widetilde{\beta}S^2\widetilde{\sigma}^2. \tag{6}$$

Напомним, что модуль G_0, который играет здесь роль масштабного коэффициента, следует понимать как характеристику материала в состоянии с $S = 0$. Отметим также, что коэффициент γ положен равным нулю, т. к. он важен только для случаев спонтанно намагниченного МАЭ, который здесь не рассматривается.

Подчеркнём, что в разложении (5) намагниченность M не является параметром порядка, поскольку она отлична от нуля при любом значении поля, однако из-за её связи со структурным параметром ход зависимости $M(H)$ изменяется в режиме $S \neq 0$ по сравнению с (1). Материальная константа M_c – это пороговое значение, по достижении которого происходит резкое изменение структурного параметра. Запись выражения (5) с использованием M_c позволяет придать функции U_{str} компактный вид, удобный для получения уравнений равновесия. С другой стороны, величина M_c не поддаётся непосредственному измерению, её можно найти только косвенно из обработки экспериментальных данных. Более ясный физический смысл имела бы величина H_c, понимаемая как характерное значение магнитного поля, выше которого в данном МАЭ начинается интенсивная кластеризация частиц. Фактически, именно значение H_c будет прямым результатом измерения, фиксируемым как точка разрыва производных $\tilde{S}(\widetilde{H})$ (рис. 1, а) и $d\widetilde{M}/d\widetilde{H}$ (рис. 1, б). Тогда величину M_c можно найти, сопоставляя экспериментальную и модельную кривые $M(H)$. Однако в случае перехода II рода ($A_3 = 0$) и при $\alpha \ll 1$ зависимость $M_c(H_c)$ очевидна. Действительно, разложение уравнения (5) при малых S показывает, что решение с $S \neq 0$ (структурирование) зарождается при $M = M_c$. Поскольку в этой точке структурный параметр бесконечно мал, он не влияет на связь M и H, которую устанавливает формула Фрёлиха – Кеннелли (1), откуда следует, что $M_c = \chi_0 M_s H_c / (M_s + \chi_0 H_c)$.

Структурирование в намагниченном МАЭ

При заданных значениях внешнего магнитного поля и механического напряжения равновесный структурный параметр МАЭ находится из условия $\partial U/\partial S = 0$, что после дифференцирования (6) приводит к уравнению

$$\left[\frac{\tilde{A}_4}{1 - S^4}\right] S^3 + \tilde{A}_3 S^2 + \\ +\left(A_2 \widetilde{M}_c^2 - A_2 \widetilde{M}^2 - \tilde{\beta}\tilde{\sigma}^2\right) S - \\ -\tfrac{1}{2}\alpha \widetilde{M}^2 = 0. \qquad (7)$$

Контролируемыми внешними факторами, воздействующими на МАЭ, являются механическое напряжение σ и магнитное поле H. Если σ явно входит в уравнение (7), то для установления связи структурного параметра с приложенным полем нужно к указанному уравнению добавить соотношение, связывающее M и H при наличии структурирования ($S \neq 0$):

$$\widetilde{H} = \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial \widetilde{M}} = \frac{\widetilde{M}\widetilde{M}_s}{\chi_0\left(\widetilde{M}_s - \widetilde{M}\right)} - \\ -\widetilde{M} S (A_2 S - \alpha), \qquad (8)$$

что можно эквивалентно записать в форме уравнения самосогласования

$$\widetilde{M} = \frac{\chi_0 \widetilde{M}_s \left[\widetilde{H} + \widetilde{M} S (A_2 S - \alpha)\right]}{\widetilde{M}_s + \chi_0 \left[\widetilde{H} + \widetilde{M} S (A_2 S - \alpha)\right]}. \qquad (9)$$

Откуда следует, что при $S \neq 0$ общая функциональная форма Фрёлиха – Кеннелли сохраняется с той лишь разницей, что реальное магнитное поле $\widetilde{H}$ должно быть заменено на эффективное:

$$\widetilde{H}_{\mathrm{eff}} = \widetilde{H} + \widetilde{M} S (A_2 S - \alpha). \qquad (10)$$

Таким образом, в рассматриваемой модели МАЭ структурирование эквивалентно усилению приложенного магнитного поля на величину, пропорциональную произведению уже достигнутых значений намагниченности и структурного параметра.

При слабой намагниченности ($\widetilde{M} \ll \widetilde{M}_s$) формула разложение (8) даёт

$$\widetilde{H} = \widetilde{M}\left[\frac{1}{\chi_0} - S(A_2 S - \alpha)\right]. \qquad (11)$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой обратную магнитную восприимчивость МАЭ, содержащего кластеры; т. е. эффективная начальная восприимчивость при $S \neq 0$ есть

$$\chi_{\mathrm{eff}} = \frac{\chi_0}{1 - \chi_0 S (A_2 S - \alpha)}. \qquad (12)$$

Учитывая, что по смыслу разложения (5) коэффициент A_2 положителен, и полагая в дальнейшем параметр α малым по сравнению с A_2, видим, что эффективная восприимчивость (11) ожидаемо возрастает по мере роста структурного параметра. Впрочем, случай $\widetilde{M} \ll \widetilde{M}_s$ вряд ли имеет практическое значение, поскольку ожидать появления в реальном МАЭ значительного структурирования при слабом внешнем поле маловероятно.

Механическое напряжение, входящее в уравнение (7), связано с обратимой частью деформации материала посредством

$$\varepsilon_{\mathrm{el}} = \frac{\partial U}{\partial \sigma} = \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial \widetilde{\sigma}} = \frac{\widetilde{\sigma}\left(1 - \widetilde{\beta} E_0 S^2\right)}{E_0}, \qquad (13)$$

так что эффективный модуль Юнга выражается соотношением

$$E_{\mathrm{eff}} = E_0 / \left(1 - \widetilde{\beta} E_0 S^2\right) \qquad (14)$$

и, как видно, возрастает с ростом структурного параметра.

Используем предложенную модель для описания эффекта магнитоиндуцированной пластичности. Это ситуация, когда намагниченный материал, подвергнутый вынужденной деформации, сохраняет её и после снятия нагрузки; упругость возвращается к нему только после выключения внешнего поля. Чтобы это учесть, представим полную накопленную деформацию как сумму упругого и квазипластического вкладов, из которых последний обусловлен исключительно структурированием (и, таким образом, существует только в намагниченном композите): $\varepsilon = \varepsilon_{\mathrm{el}} + \varepsilon_{\mathrm{str}}$.

Как и любая пластическая деформация, $\varepsilon_{\mathrm{str}}$ возникает только в том случае, когда напряжение превысит некоторое пороговое значение σ_*. Поскольку пластический отклик связан с необратимостью и зависит от истории процесса, то его описание производится с помощью набора из нескольких условий, которые в рассматриваемом случае выглядят так:

$$d\varepsilon_{\mathrm{str}} = \widetilde{\beta} S^2 d\sigma \quad \text{при } d\sigma > 0, \text{ если } \widetilde{\sigma} > \widetilde{\sigma}_* \text{ и } dS > 0; \qquad (15а)$$

$$d\varepsilon_{\mathrm{str}} = 0 \text{ при } d\sigma \le 0 \text{ и } dS > 0; \qquad (15б)$$

$$d\varepsilon_{\mathrm{str}} = \varepsilon_{\mathrm{str}} d\ln S \text{ при произвольном } d\widetilde{\sigma} \text{ и } dS < 0. \qquad (15в)$$

Для настоящей модели порог пластичности выбран в виде

$$\widetilde{\sigma}_* = K E_0 S^2, \qquad (16)$$

где K – некоторая постоянная.

По поводу последних формул необходимо сделать два замечания.

1. Рассматриваемый одномерный случай в магнитном отношении эквивалентен бесконечно длинному стрежню, поэтому внутреннее поле $\widetilde{H}$ равно полю, приложенному извне. Такая постановка исключает зависимость $\widetilde{H}$ от формы образца, т. е. «стрикционный» вклад в механическое напряжение отсутствует. По этой причине в (15а) учтено только приращение пластической деформации, зависящее от $d\sigma$. В общем случае указанное соотношение должно иметь вид $d\varepsilon_{\mathrm{str}} = \widetilde{\beta} S^2 d\widetilde{\sigma} + q d\widetilde{H}$, где q – некоторый коэффициент.

2. Формула (15в) описывает спад структурной деформации при уменьшении S. Как видно, этой формуле можно придать более общий вид: $d \ln\varepsilon_{\mathrm{str}} = p d \ln S$, интегрирование которой даёт степенную зависимость $\varepsilon_{\mathrm{str}} = S^p$. В (15в) мы произвольно положили $p = 1$, хотя для реальных материалов этот показатель должен определяться из эксперимента. Однако в нашей модели такой произвол допустим, поскольку соотношение скоростей спада $\varepsilon_{\mathrm{str}}$ и S не влияет на анализируемые характеристики МАЭ.

Алгоритм численного решения

При переходе к численному расчёту удобно перейти от безразмерного потенциала $\widetilde{U}$ к внутренней энергии $\widehat{U}$ согласно $\widehat{U} = \widetilde{U} - \widetilde{M}\widetilde{H}$. Тогда система уравнений (9) и (10) принимает вид

$$\partial\widehat{U}/\partial S = 0, \qquad \partial\widehat{U}/\partial\widetilde{M} = 0, \tag{17}$$

и, таким образом, решение задачи сводится к поиску экстремумов функции $\widehat{U}$.

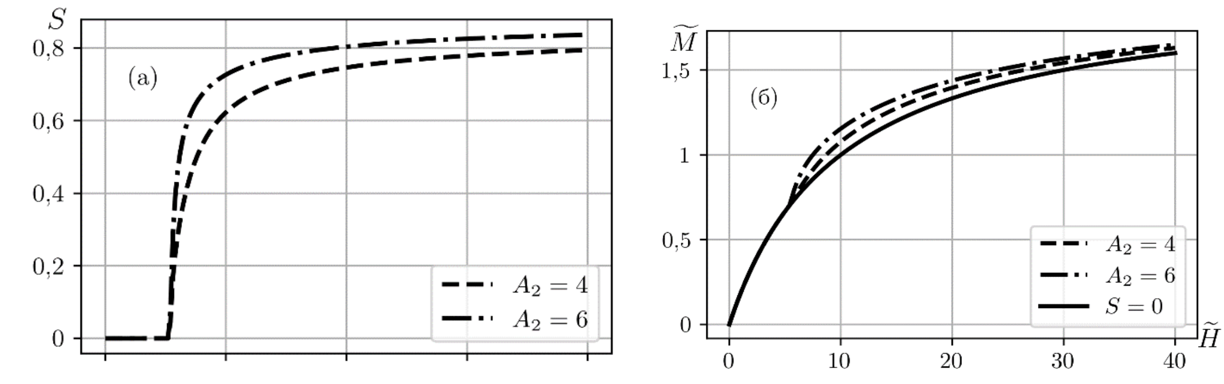
В предположении о том, что управляющие (внешние) параметры – магнитное поле H и механическая нагрузка σ – изменяются квазиравновесно, минимизация выполняется по следующей итерационной процедуре. Каждое из внешних воздействий задаётся дискретной функцией: $\widetilde{H}(k)$ или $\widetilde{\sigma}(k)$, где k – номер шага. На каждом шаге при заданных значениях $\widetilde{H}(k) = \widetilde{H}(k-1) + \Delta\widetilde{H}$ и $\widetilde{\sigma}(k) = \widetilde{\sigma}(k-1) + \Delta\widetilde{\sigma}$ находится минимум $\widehat{U}$ по переменным S и $\widetilde{M}$, где в качестве начального приближения берутся значения $S(k-1)$ и $\widetilde{M}(k-1)$, доставлявшие минимум $\widehat{U}$ на предыдущем шаге; по этим данным находится структурная деформация

$$\varepsilon_{\mathrm{pl}}^{(k)} = \varepsilon_{\mathrm{pl}}^{(k-1)} + \\ +\Delta\varepsilon_{\mathrm{pl}}\left(\begin{matrix} S^{(k-1)}, \widetilde{H}^{(k)}, \widetilde{\sigma}^{(k)}, \\ \varepsilon_{\mathrm{pl}}^{(k-1)} | \operatorname{sign}(\Delta\widetilde{\sigma}), \operatorname{sign}(\Delta S) \end{matrix}\right) \tag{18}$$

(после вертикальной черты указаны приращения переменных, знак которых проверяется).

Результаты и их обсуждение

Используем построенную модель для описания квазистатического отклика МАЭ, который структурируется по сценарию фазового перехода II рода. В этом случае коэффициент A_3 в (5) и (9) отсутствует, так что функция $\widehat{U}(\widetilde{M}, S, \widetilde{\sigma})$ однозначна и непрерывна при любых значениях своих аргументов и всегда имеет единственный минимум; в точке перехода производная $dS/d\widetilde{H}$ терпит разрыв. На рисунке 1 представлены зависимости $S(\widetilde{H})$ и $\widetilde{M}(\widetilde{H})$, полученные для нескольких вариантов значений коэффициентов модели[1].



а б

Рис. 1. Зависим $\widetilde{\sigma} = 0$ для набора параметров: $\chi_0 = 0{,}2$; $\widetilde{M}_c = 0{,}6$; $\tilde{A}_3 = 0$; $\tilde{A}_4 = 5$; $\alpha = 10^{-4}$ и $\tilde{\beta} = 0{,}3$

Fig. 1. Dependences of structure parameter (a) and magnetization (б) on the nondimensional magnetic field for $\widetilde{\sigma} = 0$ with the set of parameters: $\chi_0 = 0{,}2$, $\widetilde{M}_c = 0{,}6$, $\tilde{A}_3 = 0$; $\tilde{A}_4 = 5$; $\alpha = 10^{-4}$ and $\tilde{\beta} = 0{,}3$

[1] В этом примере рассматривается решение задачи, где в энергии $\widehat{U}$ отсутствует слагаемое $\propto S^3$, тем самым переход по структурному параметру S может быть только второго рода. Это означает, что функция $\widehat{U}(\widetilde{M}, S)$ однозначна при любых значениях своих аргументов и, таким образом, имеет единственный минимум. Ситуация, когда $A_3 \neq 0$, качественно отлична: в ней допустим переход первого рода и, таким образом, появление нескольких экстремумов $\widehat{U}(\widetilde{M}, S)$.

Как и ожидалось, структурный параметр возникает при конечном значении приложенного поля, и с его появлением кривая намагниченности ускоряет рост. На мезоскопическом уровне это можно трактовать как следствие объединения частиц наполнителя в цепочечные агрегаты, за счёт чего магнитная восприимчивость композита повышается.

Для пояснения расчёта, результатами которого являются графики, приведенные на рисунке 1, на левой половине рисунка 2 показаны изменения главных характеристик МАЭ (для $\tilde{A}_3 = 0$). Квазистатический процесс включает намагничивание и растяжение; номер шага k играет здесь роль виртуального времени. В исходном состоянии ($k = 0$) все характеристики имеют нулевые значения. На интервале k = 1…200 на МАЭ накладывается линейно возрастающее магнитное поле. Достигнув заданной величины, оно остаётся постоянным в интервале k = 201…600, при k = 601…800 линейно спадает до нуля (рис. 2, а). В состоянии, когда система находится под действием поля, она подвергается растяжению (рис. 2, б), которое линейно возрастает до значения $\widetilde{\sigma} > \widetilde{\sigma}_*$ на интервале k = 200…400 и линейно спадает до нуля на интервале k = 400…600.

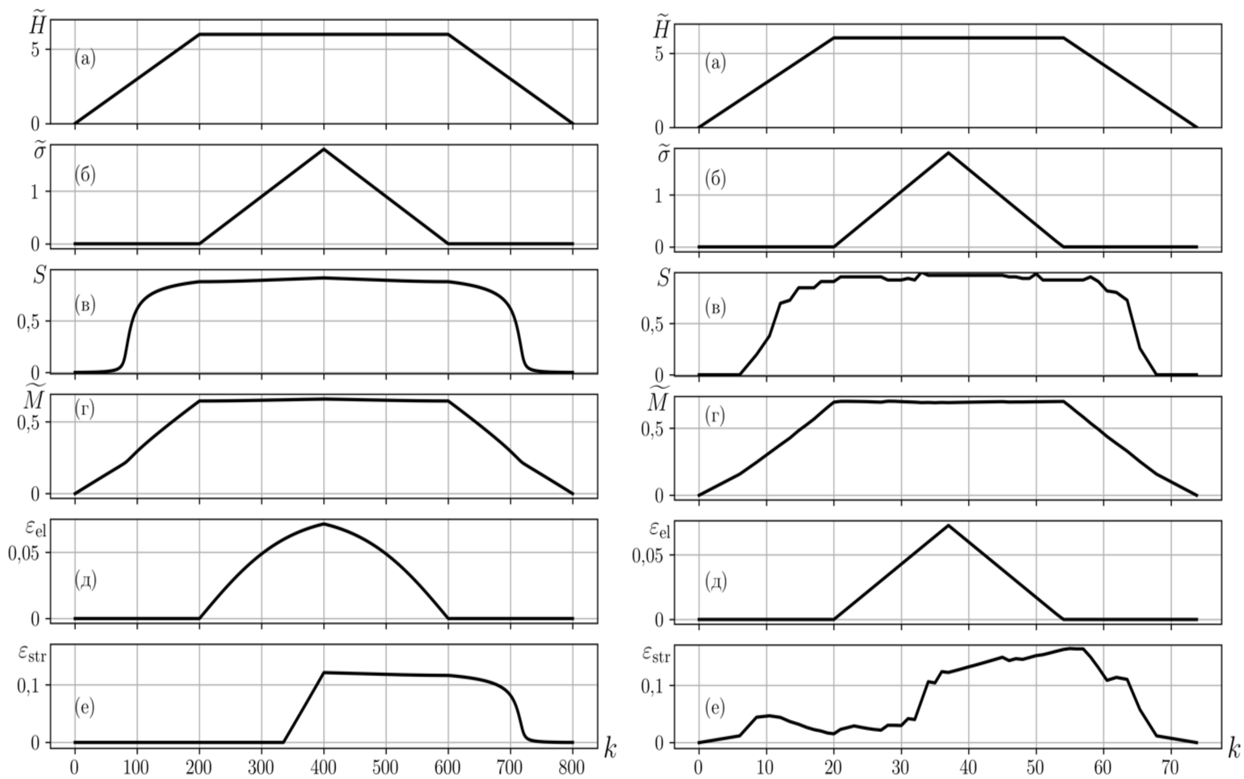


Рис. 2. Характеристики МАЭ со структурным параметром (слева) и результаты мезоскопического моделирования (справа) в зависимости от числа шагов k расчёта в цикле включение/выключение поля и нагрузки. Параметры: $\chi_0 = 0{,}09$; $\widetilde{M}_c = 0{,}6$; $\widetilde{M}_s = 10$; $A_2 = 3{,}2$; $\tilde{A}_4 = 0{,}25$; $\alpha = 0{,}1$; $\tilde{\beta} = 0{,}35$

Fig. 2. Characteristics of the MAE with structure parameter (left) and the results of mesoscopic modelling (right) in dependence on the step number k of calculation steps for the switching on/off cycle of the field and load. Parameters: $\chi_0 = 0{,}09$; $\widetilde{M}_c = 0{,}6$; $\widetilde{M}_s = 10$; $A_2 = 3{,}2$; $\tilde{A}_4 = 0{,}25$; $\alpha = 0{,}1$; $\tilde{\beta} = 0{,}35$

При нарастании поля намагниченность изменяется монотонно (см. рис. 2, в), однако по достижении значения $\widetilde{M} = \widetilde{M}_c$ (при $k \simeq 45$) скорость её изменения возрастает, поскольку в этот момент в системе возникает структурирование (см. рис. 2, г). При спадании поля (k = 601…800) вместе с ним падает и намагниченность, причём скорость этого падения уменьшается после прохождения уровня $\widetilde{M} = \widetilde{M}_c$ (при $k \simeq 755$), когда структурный параметр обращается в нуль. Для использованного набора коэффициентов изменение наклона кривой $\widetilde{M}(\widetilde{H})$ из-за выбранного масштаба графика заметно слабо, но его хорошо видно на рисунке 1, б.

Упругая деформация ведёт себя тривиально: повторяет профиль механической нагрузки (см. рис. 2, д). Наиболее сложным образом эволюционирует структурная деформация $\varepsilon_{\mathrm{str}}$ (см. рис. 2, е). Как и требуют условия (15), до того момента, как напряжение не превысит $\widetilde{\sigma}_* = 0{,}6$, величина $\varepsilon_{\mathrm{str}}$ остаётся нулевой. Выше этого порога она возрастает линейно вслед за внешним напряжением, а после того, как $\widetilde{\sigma}$ достигает максимума (при $k = 400$), $\varepsilon_{\mathrm{str}}$ остаётся постоянной до тех пор, пока не начинается спад намагниченности (при $k = 600$), а с нею – структурного параметра.

На шаге $k = 755$ с обращением в нуль структурного параметра исчезает и пластичность ($\varepsilon_{\mathrm{str}} = 0$). Таким образом, как следует из рисунка 2, МАЭ ведёт себя обратимо по отношению к циклу включение/выключение поля, однако находясь в намагниченном состоянии – при условии, что к нему прикладывается напряжение, превышающее порог $\widetilde{\sigma}_*$ – следует пластическому сценарию.

Для сопоставления на правой части рисунка 2 показаны те же характеристики намагничивания/нагружения МАЭ, полученные с прямым численным моделированием мезоскопической задачи; часть этих данных была приведена в работе [20]. Там рассматривался образец МАЭ в виде прямой призмы (аспектное отношение 5:1) из упругой сплошной среды с 20 об. % наполнением случайно распределёнными магнитомягкими сферическими частицами. Структурный параметр определялся как доля частиц, имеющих не менее одного близкого соседа.

Магнитное поле было направлено вдоль длинной оси призмы. Приложенная к торцам сила была как растягивающей, так и сжимающей. С учётом неизбежных флуктуаций численного счёта, обусловленных конечностью частиц в моделируемой системе, согласие между соответственными графиками на рисунке 2 следует признать весьма удовлетворительным.

Деформационная диаграмма рассматриваемой модели – зависимость $\widetilde{\sigma}$ от $\varepsilon = \varepsilon_{\mathrm{el}} + \varepsilon_{\mathrm{str}}$ – для квазистатического протокола изменения поля и напряжения (см. рис. 2, а, б) показана на рисунке 3. Отрезок AB соответствует упругой деформации, индуцированной возрастанием напряжения на интервале $0 \le \widetilde{\sigma} \le \widetilde{\sigma}_*$, т. е. при k = 201…315. Поскольку к моменту $k = 200$ материал уже структурирован, то это деформирование характеризуется модулем $\widetilde{E}_{\mathrm{eff}}$.

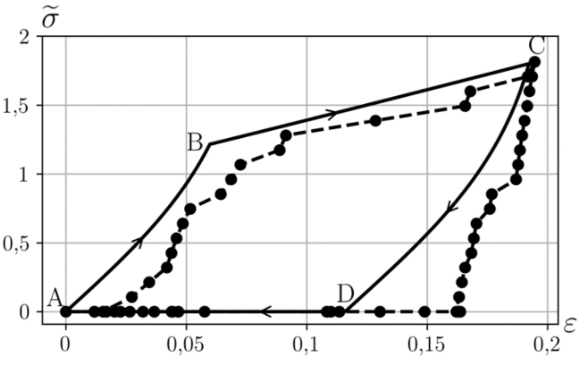


Рис. 3. Зависимость $\widetilde{\sigma}(\varepsilon)$ при магнитомеханическом нагружении по протоколу рисунка 2, а,б; остальные параметры расчёта те же, что на рисунке 2

Fig. 3. Dependence $\widetilde{\sigma}(\varepsilon)$ under magnetomechanical loading by the protocol of figure 2 а,б; the calculation parameters are the same as in figure 2

На отрезке BC (интервал $k = 315\ldots400$ рисунка 2, д) к упругой деформации добавляется пластическая, в результате чего эффективный модуль упругости значительно снижается. При разгрузке (интервал $k = 400 \ldots 600$ рисунка 2, б и отрезок CD на рисунке 3) упругая деформация полностью исчезает, так что полная деформация сводится к накопленной структурной (см. $\varepsilon_{\mathrm{str}}$ при $k = 600$ на рисунке 2, б), которая затем, реагируя на снижение параметра S (интервал $k = 600\ldots755$ рисунка 2, в), убывает вместе с ним до нуля (см. отрезок DA).

Петли $\tilde{\sigma}(\varepsilon)$ на рисунке 3 обладают заметным сходством. Вероятной причиной их относительного сдвига является конечность образца, который изучался в мезоскопическом численном эксперименте. Однако гораздо более важно, что петля, полученная из модели со структурным параметром, качественно полностью соответствует результату мезоскопического расчёта. При этом последний является несоизмеримо более трудо- и ресурсоёмкой процедурой по сравнению с уравнениями, предложенными в настоящей работе.

Выводы

Предложена макроскопическая модель, представляющая магнитоактивный эластомер как систему, обладающую структурным параметром порядка. Этот подход позволяет единым образом описать необратимое поведение (гистерезис) как намагниченности, так и деформации. Тем самым показано, что эти эффекты, прежде трактовавшиеся по отдельности, принципиально связаны друг с другом. Даже при рассмотрении (для простоты) одномерной модели магнитного композита концепция параметра порядка оказалась весьма полезной и привела к выводам, вполне совпадающим с теми, что были получены при детальном мезоскопическом расчёте.

Отметим, что сделанный выше вывод не противоречит тому факту, что гистерезис намагниченности в представленном рассмотрении отсутствует. Для его появления требуется сохранить в разложении энергии по параметру порядка коэффициент A_3 (рассмотреть переход I рода). Здесь этого не сделано лишь ввиду ограниченного объёма статьи.

В то же время достоверность и удобство подхода, основанного на введении структурного параметра порядка, пока нельзя считать полностью доказанной. Задачей ближайшего будущего является распространение развитого формализма на 2D и 3D случаи, где параметру порядка будут приданы тензорные свойства, чтобы он учитывал также и ориентационные характеристики агрегатов частиц.

Список литературы

1. Alapan Y., Karacakol A. C., Guzelhan S. N., Isik I., Sitti M. Reprogrammable shape morphing of magnetic soft machines // Science Advances. 2020. Vol. 6. Art. no. eabc6414. https://doi.org/10.1126/sciadv.abc6414.

2. Morillas J. R., de Vicente J. Magnetorheology: A review // Soft Matter. 2020. Vol. 16. P. 9614–9642. https://doi.org/10.1039/d0sm01082k.

3. Magneto-rheological elastomer composites. A review / S. Samal, M. Škodová, L. Abate, I. Blanco // Applied Science. 2020. Vol. 10. Art. no. 4899. https://doi.org/10.3390/app10144899.

4. Zhalmuratova D., Chung H.-J. Reinforced gels and elastomers for biomedical and soft robotics applications // ACS Applied Polymer Materials. 2020. Vol. 2. P. 1073–1091. https://doi.org/10.1021/acsapm.9b01078.

5. Development of magnetorheological elastomers–based tuned mass damper for building protection from seismic event / S. Sun, J. Yang, H. Du, S. Zhang, T. Yan, M. Nakano, W. Li // Journal of Intelligent

Material Systems and Structures. 2018. Vol. 22. P. 1777–1789. https://doi.org/10.1177/1045389X17754265.

6. Magnetoactive acoustic metamaterials / K. Yu, N. X. Fang, G. Huang, Q. Wang // Advanced Materials. 2018. Vol. 30. Art. no. 1706348. https://doi.org/10.1002/adma.201706348.

7. Behrooz M., Gordaninejad F. A flexible micro fluid transport system featuring magnetorheological elastomer // Smart Materials and Structures. 2016. Vol. 26. Art. no. 025011. https://doi.org/10.1088/0964-1726/25/2/025011.

8. Ferromagnetic soft continuum robots / Y. Kim, G. A. Parada, S. Liu, X. Zhao // Science Advances. 2019. Vol. 4. Art. no. eaax7329. https://doi.org/10.1126/scirobotics.aax7329.

9. Magnetodeformational effect and effect of shape memory in magnetoelastics / L. V. Nikitin, G. V. Stepanov, L. S. Mironova, A. I. Gorbunov // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 2004. Vol. 272–276. P. 2072–2073. https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2003.12.838.

10. Effect of a homogeneous magnetic field on the viscoelastic behavior of magnetic elastomers / G. V. Stepanov, S. S. Abramchuk, D. A. Grishin, L. V. Nikitin, E. Y. Kramarenko, A. R. Khokhlov // Polymer. 2007. Vol. 48. P 488–495. https://doi.org/10.1016/j.polymer.2006.11.044.

11. Melenev P. V., Raikher Y. L., Rusakov V. V. Field-induced plasticity of soft magnetic elastomers // Journal of Physics: Conference Series. 2009. Vol. 149. Art. No. 012094. https://doi.org/10.1088/1742-6596/149/1/012094.

12. Melenev P. V., Raikher Y. L., Rusakov V. V. Plasticity of soft magnetic elastomers // Высокомолекулярные соединения. Серия A. 2010. Т. 52. С. 628–633. https://doi.org/10.1134/S0965545X10040127.

13. Modeling of the field-Induced plasticity of soft magnetic elastomers / P. V. Melenev, Y. L. Raikher, G. V. Stepanov, V. V. Rusakov, L. S. Polygalova // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. 2011. Vol. 22. P. 531–538. https://doi.org/10.1177/1045389X11403819.

14. Field-induced plasticity of magneto-sensitive elastomers in context with soft robotic gripper applications / J. Ch. Vega, T. Kaufhold, V. Böhm, T. Becker, K. Zimmermann, M. Martens, M. Schilling, T. Gundermann, S. Odenbach // Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics. 2017. Vol. 17. P. 23–26. https://doi.org/10.1002/pamm.201710007.

15. Magnetoactive elastomer based on superparamagnetic nanoparticles with Curie point close to room temperature / Yu I. Dzhezherya, Xu W., S. V. Cherepov, Yu. B. Skirta, V. M. Kalita, A. V. Bodnaruk, N. A. Liedienov, A. V. Pashchenko, I. V. Fesych, B. Liu, G. G. Levchenko // Materials & Design. 2021. Vol. 197. Art. No. 109281. https://doi.org/10.1016/j.matdes.2020.109281.

16. Reconfigurable surface micropatterns based on the magnetic field-induced shape memory effect in magnetoactive elastomers / M. Lovšin, D. Brandl, G. Glavan, I. A. Belyaeva, L. Cmok, L. Čoga, M. Kalin, M. Shamonin, I. Drevenšek-Olenik // Polymers. 2021. Vol. 13. Art. no. 4422. https://doi.org/10.3390/polym13244422.

17. Бозорт Р. Ферромагнетизм. М.: Иностр. лит., 1956. 784 с.

18. Де Жен П. Физика жидких кристаллов. 1977. М.: Мир, 1977.

19. Шлиомис М. И., Райхер Ю. Л. Ориентационное упорядочение и механические свойства твёрдых полимеров // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1978. Т. 74. С. 1760–1783.

20. Stolbov O. V., Raikher Y. L. Mesostructural origin of the field-induced pseudoplasticity effect in a soft magnetic elastomer // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2019. Vol. 581. Art. no. 012003. https://doi.org/10.1088/1757-899X/581/1/012003.

References

1. Alapan Y., Karacakol A. C., Guzelhan S. N., Isik I., Sitti M. Reprogrammable shape morphing of magnetic soft machines. *Science Advances*, 2020, vol. 6, art. no. eabc6414. https://doi.org/10.1126/sciadv.abc6414

2. Morillas J. R., de Vicente J. Magnetorheology: A review. *Soft Matter.*, 2020, vol. 16, pp. 9614–9642. https://doi.org/10.1039/d0sm01082k

3. Samal S., Škodová M., Abate L., Blanco I. Magneto-rheological elastomer composites. A review. *Applied Science*, 2020, vol. 10, art. no. 4899. https://doi.org/10.3390/app10144899

4. Zhalmuratova D., Chung H.-J. Reinforced gels and elastomers for biomedical and soft robotics applications. *ACS Applied Polymer Materials*, 2020, vol. 2, pp. 1073–1091. https://doi.org/10.1021/acsapm.9b01078

5. Sun S., Yang J., Du H., Zhang S., Yan T., Nakano M., Li W. Development of magnetorheological elastomers–based tuned mass damper for building protection from seismic event. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2018, vol. 22, pp. 1777–1789. https://doi.org/10.1177/1045389X17754265

6. Yu K., Fang N. X., Huang G., Wang Q. Magnetoactive acoustic metamaterials. *Advanced Materials*, 2018, vol. 30, art. no. 1706348. https://doi.org/10.1002/adma.201706348

7. Behrooz M., Gordaninejad F. A flexible micro fluid transport system featuring magnetorheological elastomer. *Smart Materials and Structures*, 2016, vol. 26, art. no. 025011. https://doi.org/10.1088/0964-1726/25/2/025011

8. Kim Y., Parada G. A., Liu S., Zhao X. Ferromagnetic soft continuum robots. *Science Advances*, 2019, vol. 4, art. no. eaax7329. https://doi.org/10.1126/scirobotics.aax7329

9. Nikitin L. V., Stepanov G. V., Mironova L. S., Gorbunov A. I. Magnetodeformational effect and effect of shape memory in magnetoelastics. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2004, vol. 272–276, pp. 2072–2073. https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2003.12.838

10. Stepanov G. V., Abramchuk S. S., Grishin D. A., Nikitin L. V., Kramarenko E. Y., Khokhlov A. R. Effect of a homogeneous magnetic field on the viscoelastic behavior of magnetic elastomers. *Polymers*, 2007, vol. 48, pp. 488–495. https://doi.org/10.1016/j.polymer.2006.11.044

11. Melenev P. V., Raikher Y. L., Rusakov V. V. Field-induced plasticity of soft magnetic elastomers. *Journal of Physics: Conference Series*, 2009, vol. 149, art. no. 012094. https://doi.org/10.1088/1742-6596/149/1/012094

12. Melenev P. V., Raikher Y. L., Rusakov V. V. Plasticity of soft magnetic elastomers. *Polymer Science*. *Series A*, 2010, vol. 52, pp. 430–435. https://doi.org/10.1134/S0965545X10040127

13. Melenev P. V., Raikher Y. L., Stepanov G. V., Rusakov V. V., Polygalova L. S. Modeling of the field-Induced plasticity of soft magnetic elastomers. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2011, vol. 22, pp. 531–538. https://doi.org/10.1177/1045389X11403819

14. Vega J. Ch., Kaufhold T., Böhm V., Becker T., Zimmermann K., Martens M., Schilling M., Gundermann T., Odenbach S. Field-induced plasticity of magneto-sensitive elastomers in context with soft robotic gripper applications. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, vol. 17, pp. 23–26. https://doi.org/10.1002/pamm.201710007

15. Dzhezherya Yu I., Xu W., Cherepov S. V., Skirta Yu. B., Kalita V. M., Bodnaruk A. V., Liedienov N. A., Pashchenko A. V., Fesych I. V., Liu B., Levchenko G. G. Magnetoactive elastomer based on superparamagnetic nanoparticles with Curie point close to room temperature. *Materials & Design*, 2021, vol. 197, art. no. 109281. https://doi.org/10.1016/j.matdes.2020.109281

16. Lovšin M., Brandl D., Glavan G., Belyaeva I. A., Cmok L., Čoga L., Kalin M., Shamonin M., Drevenšek-Olenik I. Reconfigurable surface micropatterns based on the magnetic field-induced shape memory effect in magnetoactive elastomers. *Polymers*, 2021, vol. 13, art. no. 4422. https://doi.org/10.3390/polym13244422

17. Bozort R. M. Ferromagnetism. New York: Wiley-IEEE Press, 1993.

18. de Gennes P. G. The Physics of Liquid Crystals. Oxford, Clarendon Press,1974.

19. Shliomis M. I., Raikher Yu. L. Orientation ordering and the mechanical properties of solid polymers. *Soviet Physics JET*P, 1978, vol. 47, pp. 918–931.

20. Stolbov O. V., Raikher Y. L. Mesostructural origin of the field-induced pseudoplasticity effect in a soft magnetic elastomer. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2019, vol. 581, art. no. 012003. https://doi.org/10.1088/1757-899X/581/1/012003

Информация об авторах / Information about the Authors

Столбов Олег Валерьевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории динамики дисперсных систем, Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук – филиал Пермского федерального исследовательского центра Уральского отделения Российской академии наук, г. Пермь, Российская Федерация,
e-mail: sov@icmm.ru,
ORCID: 0000-0001-9088-7909

Oleg V. Stolbov, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Senior Researcher at the Laboratory of Disperse Systems Dynamics, Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of Russian Academy of Science, Perm, Russian Federation,
e-mail: sov @icmm.ru,
ORCID: 0000-0001-9088-7909

Райхер Юрий Львович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории динамики дисперсных систем, Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук – филиал Пермского федерального исследовательского центра Уральского отделения Российской академии наук, г. Пермь, Российская Федерация,
e-mail: raikher@icmm.ru,
ORCID: 0000-0002-6167-6528

Yuriy L. Raikher, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Chief Researcher at the Laboratory of Dynamics of Disperse Systems, Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of Russian Academy of Science, Perm, Russian Federation, e-mail: raikher@icmm.ru,
ORCID: 0000-0002-6167-6528