

Оригинальная статья / Original article

УДК 532.5927

<https://doi.org/10.21869/2223-1528-2023-13-3-117-127>

О влиянии поверхностного электрического заряда на закономерности формирования ряби Фарадея на поверхности маловязкой жидкости

Д. Ф. Белоножко¹ ✉

¹ Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
ул. Советская, д. 14, г. Ярославль 150003, Российская Федерация

✉ e-mail: belonozhko@mail.ru

Резюме

Целью исследования является анализ влияния поверхностного электрического заряда на условия возникновения ряби Фарадея на горизонтальной поверхности маловязкой жидкости, находящейся в вибрационном поле.

Методы. Задача решена аналитически в пределе малой амплитуды искажений свободной поверхности жидкости. Финальное соотношение выведено при условии малости диссипации. Жидкость считалась идеально проводящей с поверхностно распределенным электрическим зарядом.

Результаты. Построено простое аналитическое выражение, количественно описывающее эффект подавления ряби Фарадея при увеличении поверхностной плотности электрического заряда. Показано, что увеличение поверхностной плотности электрического заряда существенно увеличивает пороговое значение амплитуды вибрационного поля, превышение которого приводит к образованию ряби. Пороговое значение амплитуды вибраций пропорционально вязкости жидкости и зависит от её плотности, коэффициента поверхностного натяжения и характерного горизонтального масштаба ряби.

Заключение. Рябь Фарадея, образующаяся на поверхности жидкости в вертикально осциллирующем контейнере, весьма чувствительна к величине поверхностной плотности электрического заряда. При увеличении поверхностной плотности заряда образование ряби подавляется. Обнаруженный эффект может быть использован для предотвращения появления паразитных конвективных течений, возникающих в жидких слоях, находящихся в вибрационных полях. Физический механизм подавления ряби Фарадея – соперничество двух качественно различных типов течений вблизи поверхности жидкости. Увеличение поверхностной плотности заряда изменяет баланс поверхностных сил таким образом, чтобы содействовать появлению апериодических и подавлять колебательные движения и циклические течения. В частности, подавляются колебательные движения, отвечающие за развитие неустойчивости Фарадея, вызванной вертикальными вибрациями контейнера с жидкостью.

Ключевые слова: параметрические колебания; свободная поверхность; капиллярные силы; вязкая жидкость; заряженная поверхность.

Конфликт интересов: Автор декларирует отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Для цитирования: Белоножко Д. Ф. О влиянии поверхностного электрического заряда на закономерности формирования ряби Фарадея на поверхности маловязкой жидкости // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии. 2023. Т. 13, № 3. С. 117–127. <https://doi.org/10.21869/2223-1528-2023-13-3-117-127>

Поступила в редакцию 18.07.2023

Подписана в печать 25.08.2023

Опубликована 29.09.2023

© Белоножко Д. Ф., 2023

On the Influence of the Surface Electric Charge on the Regularities of the Formation of Faraday Ripples on the Surface of a Low-Viscosity Liquid

Dmitry F. Belonozhko¹ ✉

¹ P. G. Demidov Yaroslavl State University
14 Sovetskaya Str., Yaroslavl 150003, Russian Federation

✉ e-mail: belonozhko@mail.ru

Abstract

The purpose of the study is to analyze the effect of a surface electric charge on the formation conditions of the Faraday ripples on a horizontal surface of a low-viscosity liquid in a vibration field.

Methods. The problem is solved analytically in the limit of small amplitude deformation of the free surface of the liquid. The final relation is derived under the condition that the dissipation is small. The liquid was considered ideally conductive with a surface-distributed electric charge.

Results. A simple analytical expression is derived that quantitatively describes the effect of suppression of the Faraday ripple if the surface density of the electric charge increases. It is shown that the increase in the surface density of the electric charge significantly enlarges the threshold value of the vibration field amplitude, the excess of which leads to the formation of ripples. The threshold value of the vibration amplitude is proportional to the viscosity of the liquid and depends on its density, surface tension coefficient and the specific horizontal scale of the ripple.

Conclusion. The Faraday's ripple formed on the surface of a liquid in a vertically oscillating container is very sensitive to the value of the surface density of the electric charge. An increase of the surface charge density leads to suppression of the ripple formation. The effect can be used to prevent the appearance of parasitic convective flows that arise in liquid layers placed in vibration fields. The physical mechanism of Faraday ripple suppression is the rivalry between two qualitatively different types of flows near the liquid surface. Increasing the surface charge density changes the balance of surface forces in such a way as to promote the appearance of aperiodic motions and suppress oscillatory ones. In particular, oscillatory motions responsible for the development of Faraday instability caused by vertical vibrations of the liquid container are suppressed.

Keywords: parametric oscillations; free surface; capillary forces; viscous liquid; charged surface.

Conflict of interest: The author declares no apparent or potential conflicts of interest related to the publication of this article.

For citation: Belonozhko D. F. On the Influence of the Surface Electric Charge on the Regularities of the formation of Faraday Ripples on the Surface of a Low-Viscosity Liquid. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Tekhnika i tekhnologii* = *Proceedings of the Southwest State University. Series: Engineering and Technologies*. 2023; 13(3): 117–127. (In Russ.) <https://doi.org/10.21869/2223-1528-2023-13-3-117-127>

Received 18.07.2023

Accepted 25.08.2023

Published 29.08.2023

Введение

В 1831 г. М. Фарадей описал образование периодических неровностей и ячеек на горизонтальной поверхности жидкости, заполняющей вертикально осциллирующий контейнер [1]. В настоящее время это явление носит название «неустойчивость Фарадея». Картины неровностей на поверхности жидкости именуют «рябь Фарадея». Всякий раз, когда жидкий слой

или жидкая пленка оказываются в вибрационном поле, приходится обращаться к теории неустойчивости Фарадея, чтобы правильно оценить условия протекания того или иного природного, технического или технологического процесса [2–9].

В приближении идеальной жидкости теория данного явления разработана достаточно подробно [10]. Но во многих случаях крайне важно учитывать вязкость

жидкости. Без учета диссипации невозможно ни объяснить, ни описать пороговый характер неустойчивости Фарадея, состоящий в том, что рябь – система периодических ячеек или складок – появляется, только если амплитуда вертикальных колебаний контейнера превышает некое пороговое значение [11]. Учет же вязкости кардинально усложняет модель, и конкретные числовые оценки удастся получать либо численно, либо в виде чрезвычайно громоздких аналитических выражений, практическая ценность которых оказывается весьма спорной. Тем более призрачной представляется перспектива аналитического описания явления, если, кроме вибрационного, требуется учесть ещё и физические поля другого рода, например электрическое или магнитное.

В настоящем исследовании показано, что если вязкость жидкости мала, то имеется возможность построения простого аналитического выражения для значения пороговой амплитуды вертикальных вибраций контейнера, выше которой на электрически заряженной поверхности маловязкой жидкости, заполняющей контейнер, появляется рябь Фарадея.

Математическая формулировка задачи

Пусть жидкость с плотностью ρ , поверхностным натяжением γ и кинематической вязкостью ν заполняет нижнее полупространство $z < 0$ в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$. Ось Oz направлена вертикально вверх против направления действия поля силы тяжести $\mathbf{g}$. Система координат вместе с жидкостью совершает малые гармонические колебания с амплитудой a и циклической частотой 2ω относительно некоторой инерциальной системы, связанной с Землей. По плоской поверхности жидкости равномерно распределен электрический заряд. Тем самым в верхнем полупространстве создается вертикальное однородное элек-

трическое поле с напряженностью E_0 . Исследовалась устойчивость выше описанного состояния системы по отношению к малым возмущениям свободной поверхности жидкости $z = \xi(t, x)$ (здесь t – время). Для упрощения задачи считалось, что все физические величины зависят только от одной горизонтальной координаты x и не зависят от y .

Полная математическая формулировка задачи расчета возмущенного поверхностным волновым движением поля скоростей $\mathbf{U} \equiv \mathbf{U}(x, z, t)$, давления в жидкости $P \equiv P(x, z, t)$ и электрического потенциала $\Phi \equiv \Phi(x, z, t)$ над жидкостью состоит из уравнений электрогидродинамики вязкой несжимаемой жидкости со стандартными граничными условиями на глубине и на свободной поверхности [12–13]:

$$z > \xi: \Delta\Phi = 0; \quad (\nabla \cdot \mathbf{U}) = 0;$$

$$z < \xi:$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{U} + \mathbf{g} - 4a\omega^2 \mathbf{e}_z \cos(2\omega t);$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{U}) = 0;$$

$$z = \xi: \frac{\partial \xi}{\partial t} + v_x \frac{\partial \xi}{\partial x} - v_z = 0;$$

$$\mathbf{n} \cdot ((\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{U}) + \boldsymbol{\tau} \cdot ((\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U}) = 0;$$

$$P - 2\rho\nu(\mathbf{n} \cdot ((\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U})) + P_E + P_\gamma = 0;$$

$$\Phi = \text{const};$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{0},$$

где $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ – орты нормали и касательной к свободной поверхности; v_x и v_z – горизонтальная и вертикальная компоненты скорости жидкости; $\mathbf{e}_z$ – орт оси Oz . На деформированной свободной поверхности учитывается капиллярное давление $P_\gamma = -\gamma \nabla \cdot \mathbf{n}$ и поверхностное давление, созданное электрическим полем $P_E = (\nabla \Phi)^2 / (8\pi)$. Символами Δ и ∇ обозначены оператор Лапласа и векторный оператор Гамильтона.

В связи с нелинейностью задачи для построения её аналитического решения выполнялась линеаризация по амплитуде волнового возмущения $\xi \sim \exp(ikx)$ с волновым числом k и переход к безразмерным переменным, в которых $\rho = g = \gamma = 1$. Кроме того, вводилась новая переменная, отвечающая за время $\tau = \omega t$.

Математическая формулировка линеаризованной задачи имеет вид

$$z > 0: \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0; \quad (1)$$

$$z < 0: \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right);$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right); \quad (2)$$

$$z = 0: \quad \varphi - E_0 \xi = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = v; \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad (5)$$

$$-\rho \xi \left(1 - \frac{4a\omega^2}{g} \cos(2\omega t) \right) g + p -$$

$$- 2\rho v \frac{\partial v}{\partial z} - E_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}; \quad (6)$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad u \rightarrow 0; \quad v \rightarrow 0, \quad (7)$$

где $\varphi \equiv \varphi(x, z, t)$ – безразмерная поправка первого порядка малости к равновесному значению безразмерного электрического потенциала $\Phi_0 = -E_0 z$; $p \equiv p(x, z, t)$ – безразмерное возмущение безразмерного гидростатического давления $P_0 = -z$; u и v – горизонтальная и вертикальная компоненты скорости жидкости в первом приближении по амплитуде возмущения.

Материалы и методы

Коэффициент $\cos(2\tau)$, имеющийся в линейной относительно неизвестных системе соотношений (1)–(7), указывает на то, что мы имеем дело с линейной задачей с параметрическим возбуждением. В основе метода решения лежит теория Флоке

[14]. Согласно этой теории для линейных систем с параметрическим возбуждением установлен критерий пребывания в состоянии нейтральной устойчивости – промежуточном между состояниями с ограниченными по амплитуде движениями и состояниями с нарастающей амплитудой начального возмущения. Как показывает теория, в нейтральном по устойчивости состоянии все неизвестные функции периодически зависят от параметра τ . Период равен π в одном классе состояний нейтральной устойчивости, и вдвое больше – в другом. В состоянии нейтральной устойчивости эволюция волнового возмущения с волновым числом k описывается рядом Фурье [14]:

$$\xi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\tau - ikx). \quad (8)$$

Другие неизвестные u, v, p, φ требуют учета зависимости коэффициентов разложения от вертикальной координаты z :

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(z) \exp(in\tau - ikx);$$

$$v = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(z) \exp(in\tau - ikx); \quad (9)$$

$$p = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n(z) \exp(in\tau - ikx);$$

$$\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n(z) \exp(in\tau - ikx).$$

Решение задачи

Подставляя (9) в (1) – (2) и учитывая условия (7), несложно определить вид функций от z , записанных в (9):

$$f_n(z) = A_n \exp(kz) + B_n \exp(Q_n z);$$

$$F_n(z) = i A_n \exp(kz) + \frac{ik}{Q_n} B_n \exp(Q_n z);$$

$$G_n(z) = \frac{\omega n}{k} A_n \exp(kz);$$

$$H_n(z) = R_n \exp(kz); \quad (10)$$

$$Q_n = \sqrt{k^2 + \frac{in\omega}{v}}.$$

Принимая во внимание затухание движения с глубиной, при расчете Q_n следует использовать значение квадратного корня с положительной действительной частью.

Подстановка (8) и (10) в граничные условия на свободной поверхности (3)–(6) приводит их к линейно однородной системе уравнений для определения постоянных A_n, B_n, G_n, H_n и c_n . Несложно исключить A_n, B_n, G_n, H_n и свести всё к однородной бесконечной системе линейных однородных уравнений относительно c_n :

$$M_n c_n - q(c_{n-2} + c_{n+2}) = 0; \quad (11)$$

$$M_n = \begin{pmatrix} \Omega^2 - n^2 + 4in\delta + 4\delta^2 - \\ -4\delta^{3/2}\sqrt{\delta + in} \end{pmatrix}; \quad (12)$$

$$\Omega^2 = \frac{k(1+k^2-kW)}{\omega^2}; \quad W = \frac{E_0^2}{4\pi\sqrt{\rho g \gamma}}; \\ \delta = \frac{\nu k^2}{\omega}; \quad q = 2ak. \quad (13)$$

Во всех расчетах выбирается ветвь квадратного корня, на которой его значения имеют положительную действительную часть.

Безразмерный параметр δ характеризует вязкость жидкости. При $\delta = 0$ соотношение (13) переходит в уравнение

$$(\Omega^2 - n^2)c_n - q(c_{n-2} + c_{n+2}) = 0.$$

Можно показать, что это результат дискретизации уравнения Матье

$$\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} + (\Omega^2 - 2q \cos(2\tau))\zeta = 0, \quad (14)$$

если рассматривать его нейтрально устойчивое решение $\zeta \equiv \zeta(\tau)$ и, следовательно, представлять его рядом Фурье $\zeta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\tau)$.

Области неустойчивости решений уравнения (14) традиционно изобража-

ются на плоскости параметров (Ω^2, q) в виде непересекающихся клинообразных плоских фигур, которые при $q = 0$ вонзаются своими заострениями в точки оси Ω^2 : $\Omega^2 = 1; 2^2; 3^2; \dots$ [14]. По номеру клина выделяют первую, вторую, третью и другие области неустойчивости. Главной считается первая область, которая начинается в точке $(\Omega^2 = 1, q = 0)$. По сути, это точка минимума границы первой зоны неустойчивости. Безразмерный параметр $q = ak$ пропорционален амплитуде вертикальных вибраций. Получается, что при $\Omega^2 = 1$ даже исчезающе малая амплитуда a вибраций контейнера вызывает рост соответствующих возмущений и образование ряби Фарадея. Значение $\Omega^2 = 1$ называется условием главного параметрического резонанса [14].

При переходе к ненулевой вязкости минимум границы первой зоны приподнимается на малое значение $ka_* = q_* > 0$, которое и определяет пороговое значение амплитуды вертикальных осцилляций контейнера a_* , которую нужно превысить, чтобы обеспечить рост волнового возмущения с волновым числом k [14]. То же самое можно качественно сказать и обо всех остальных зонах [14]. Важно, что для них учет вязкости приподнимает минимум зоны гораздо выше, чем для первой зоны. Это означает, что на первую зону диссипация влияет в гораздо меньшей мере, поэтому, во-первых, именно её неустойчивые решения наблюдаются на практике и формируют рябь Фарадея, во-вторых, к ней в наибольшей степени применимо приближение малой вязкости. Малая вязкость незначительно изменяет форму первой неустойчивой зоны и также слабо изменяет положение её максимума [14].

В рамках модели идеальной жидкости сценарий образования ряби Фарадея

можно описать следующим образом [11]. На горизонтальной свободной поверхности жидкости уже ввиду теплового движения молекул постоянно появляются слабые искажения с амплитудой порядка нескольких ангстремов. Без ограничения общности можно представлять их в виде суперпозиции всевозможных малоамплитудных волновых движений с различными волновыми числами. Вибрация контейнера «раскачивает» амплитуды этих искажений. При этом наиболее чувствительными к гармонической раскачке контейнера $\sim a \cos(2\omega t)$ оказываются возмущения, волновое число которых удовлетворяет условию главного резонанса $\Omega^2 = 1$ или, расписывая подробно:

$$\sqrt{k(1+k^2-kW)} = \omega. \quad (15)$$

Левая часть (15) оказывается совпадающей с дисперсионным уравнением для частоты волновых движений ω_0 на поверхности идеальной поверхностно заряженной жидкости. В правой же части (15) находится половина частоты колебаний контейнера. Таким образом, колебания контейнера с круговой частотой 2ω раскачивают волновые искажения, обладающие собственной частотой $\omega_0 = \omega$. Для идеальной жидкости амплитуда колебаний контейнера a может быть сколь угодно малой, чтобы вызвать резонансную раскачку соответствующих условию резонанса волновых возмущений. Последние на финальной стадии роста образуют рябь Фарадея.

При учете вязкости нужно понять, как выглядит уравнение границы первой зоны неустойчивости, где находится её минимум, и насколько он приподнимается над уровнем $q = 0$ (на плоскости параметров (Ω^2, q)).

Для ответа на первый вопрос нужно проследить, как, отправляясь от системы (11), построить уравнение границ зон не-

устойчивости [14]. Система (11) распадается на две независимые подсистемы. Первая формируется при нечетных значениях n , а вторая – при $n = 0$ и четных n . Условия разрешимости первой системы задают на плоскости параметров (Ω^2, q) уравнения границ первой, третьей и всех следующих нечетных зон неустойчивости. Вторая система определяет границы всех остальных зон неустойчивости. Чтобы ряд (8) сходил, его коэффициенты должны стремиться к нулю при $|n| \rightarrow \infty$. Поэтому условия разрешимости обеих выше описанных систем записываются в виде стремления к нулю двух последовательностей определителей:

$$\begin{vmatrix} M_{-1} & -q \\ -q & M_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} M_{-3} & -q & 0 & 0 \\ -q & M_{-1} & -q & 0 \\ 0 & -q & M_1 & -q \\ 0 & 0 & -q & M_3 \end{vmatrix} \dots \rightarrow 0;$$

$$\begin{vmatrix} M_{-2} & -q & 0 \\ -q & M_0 & -q \\ 0 & -q & M_2 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} M_{-4} & -q & 0 & 0 & 0 \\ -q & M_{-2} & -q & 0 & 0 \\ 0 & -q & M_0 & -q & 0 \\ 0 & 0 & -q & M_2 & -q \\ 0 & 0 & 0 & -q & M_4 \end{vmatrix}; \dots \rightarrow 0.$$

Последовательное приравнивание к нулю определителей четного порядка приводит к бесконечной последовательности уравнений. Первое из них является приближенным уравнением границы первой зоны устойчивости на плоскости параметров (Ω^2, q) . Второе – задаёт уравнение уже двух линий: немного уточненного уравнения первой зоны и приближенного уравнения третьей. Третье уравнение описывает границы неустойчивости первой, третьей и пятой зон, далее – по индукции.

Аналогично работает система приравненных к нулю определителей нечетного порядка.

Интересуясь исключительно формой первой зоны неустойчивости и приближением малой вязкости, вполне разумно ограничиться наиболее простым приближением, в котором уравнение границы описывается соотношением

$$\begin{vmatrix} \Omega^2 - 1 + 4i\delta + 4\delta^2 - & -q \\ -4\delta^{3/2}\sqrt{\delta+i} & \\ & \Omega^2 - 1 - 4i\delta + \\ -q & +4\delta^2 - 4\delta^{3/2}\sqrt{\delta-i} \end{vmatrix} = 0. \quad (16)$$

Под приближением малой вязкости далее будет пониматься малость параметра

$$\delta = \frac{\nu k^2}{\omega} \ll 1. \quad (17)$$

Из (16) параметр q легко выражается, как функция Ω^2 и δ . Эта функция описывает уравнение границы первой зоны неустойчивости на плоскости параметров (Ω^2, q) при различных δ . Исследуя эту функцию на экстремум, легко найти положение минимума и его значение. В главном приближении по δ выражения получаются особенно простыми: $\Omega_* = 1 + 2\sqrt{2} \delta^{3/2}$; $q_* = 4 \delta$. Расписывая Ω и δ по формулам (13), получаем систему уравнений, связывающих частоту вибраций контейнера и возбуждаемое его осцилляциями волновое число в условиях главного параметрического резонанса:

$$\frac{k(1+k^2-kW)}{\omega^2} = 1 + 2\sqrt{2} \frac{\nu^{3/2} k^3}{\omega^{3/2}};$$

$$a_* k = 4 \frac{\nu k^2}{\omega}.$$

При выполнении условия (17), можно записать приближенное выражение для a_* и условие его применимости:

$$a_* \approx 4 \frac{\nu k}{\sqrt{k(1+k^2-kW)}};$$

$$\frac{\nu k^2}{\sqrt{k(1+k^2-kW)}} \ll 1.$$

В окончательном варианте имеет смысл перейти к размерным переменным:

$$a_* \approx \frac{4 \nu \alpha^2 k}{\sqrt{\alpha k(1+\alpha^2 k^2 - \alpha k W)}} \sqrt{\frac{\rho}{\alpha \gamma}}; \quad (18)$$

$$\frac{\nu \alpha^2 k^2}{\sqrt{1+\alpha^2 k^2 - \alpha k W}} \sqrt{\frac{\rho}{\alpha \gamma}} \ll 1, \quad (19)$$

где $\alpha = \sqrt{\gamma / (\rho g)}$ – капиллярная постоянная жидкости.

Соотношение (18) – приближенное аналитическое выражение для расчета порогового значения амплитуды вертикальных вибраций контейнера, ниже которого рябь Фарадея с характерным размером ячеек $d \approx \lambda / 2 = \pi / k$ не возникает. При оценке характерного размера ряби следует брать половину длины волны волнового искажения, поскольку рябь формируется стоячими волнами, а её горизонтальный масштаб определяется расстоянием между узлами (или пучностями).

Результаты и их обсуждение

Входящий в (18) и (19) безразмерный параметр W называется параметром Тонкса – Френкеля. Он пропорционален отношению электрических и капиллярных (лапласовских) сил на гребнях волновых искажений свободной поверхности [15]. Ещё в начале прошлого века было установлено, что при $W < 2$ капиллярные силы преобладают над электрическими и сдерживают разрушение свободной поверхности [15–17]. При $W > 2$ имеются волновые возмущения, на гребнях которых электрические силы преобладают. Тогда на заряженной поверхности жидкости (незави-

симо от наличия или отсутствия вибрации) развивается неустойчивость Тонкса – Френкеля (НТФ). На закритически заряженной поверхности жидкости (при $W > 2$) формируются конусообразные выступы – конусы Тейлора [18–20], с вершин которых избыточный заряд сбрасывается в виде маленьких сильно заряженных капелек. Таким образом, закритически заряженная поверхность разрушается.

Из (19) видно, что при $W = 2$ знаменатель выражения стремится к нулю, поэтому при околокритических в смысле НТФ значениях W условие (19) перестает выполняться. Но если вязкость жидкости мала, то это условие выполняется даже при весьма близких к $W = 2$ значениях параметра Тонкса – Френкеля. Так, для воды, для которой $\rho = 1 \text{ г/см}^3$, $\gamma = 72 \text{ дин/см}$ и $g = 981 \text{ м/с}^2$, $\nu = 0,01 \text{ Ст}$, даже при $W = 1,9$ левая часть условия (19) равна примерно $0,007 \ll 1$. При $W < 1,9$ результат оценки ещё меньше. Таким образом, для воды выведенная формула (18) справедлива практически вплоть до почти критических значений $W = 2$, выше которых развивается неустойчивость по отношению к избытку электрического заряда. Если рассчитать соответствующее значение напряженности электрического поля, перпендикулярного заряженной поверхности, то получится, что формула справедлива вплоть до полей с напряженностью $E_0 < 25 \text{ кВ/см}$. Это совсем немного меньше пробойных 30 кВ/см при нормальных условиях.

Формула (18) удобна тем, что из неё сразу видно, как поверхностный электрический заряд влияет на пороговое значение a_* амплитуды вибраций, вызывающих рябь Фарадея заданного масштаба $d \approx \lambda / 2 = \pi / k$. Поверхностная плотность заряда пропорциональна напряженности E_0 , через которую выражается параметр Тонкса – Френкеля W . Легко понять, что с ростом поверхностной плотности элек-

трического заряда увеличивается значение W , а с ним уменьшается знаменатель дроби в правой части (18). Это означает, что, увеличивая поверхностную плотность электрического заряда, можно в несколько раз (а то и на порядок) увеличить пороговое значение амплитуды вибраций контейнера, вызывающих рябь Фарадея. На практике это означает, что если жидкий слой находится в вибрационном поле, от которого невозможно избавиться, но требуется подавить образование ряби Фарадея и сопутствующих конвективных течений, то нужно просто электрически зарядить поверхность слоя. Электрический заряд на свободной поверхности жидкости стремится подавить циклические движения и при больших значениях поверхностной плотности заряда вызвать апериодическое нарастание амплитуды изначально малых искажений. Этот эффект противодействует развитию колебательной параметрической неустойчивости, вызываемой осцилляциями контейнера. В результате увеличение поверхностной плотности заряда оказывается фактором, подавляющим образование ячеек Фарадея.

Выводы

Процесс образования ряби Фарадея на горизонтальной поверхности жидкости, находящейся в вибрационном поле, достаточно чувствителен к наличию на этой поверхности электрического заряда. При увеличении поверхностной плотности заряда растёт пороговое значение амплитуды вибраций, ниже которой рябь не образуется. За счет роста поверхностной плотности заряда пороговое значение амплитуды вибраций для заданного масштаба ряби можно увеличить в несколько раз (даже на порядок) и тем самым предотвратить появление сопутствующих неустойчивости Фарадея внутренних конвекционных течений. Для маловязких

жидкостей пороговое значение амплитуды осцилляций оценивается по простой аналитической формуле и зависит от плотности, вязкости, поверхностного натяже-

ния жидкости, поверхностной плотности электрического заряда и от характерного масштаба ячеек Фарадея.

Список литературы

1. Faraday M. XVII. On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces // Philosophical transactions of the Royal Society of London. 1831. No. 121. P. 299–340.
2. Pototsky A., Bestehorn M. Faraday instability of a two-layer liquid film with a free upper surface // Physical Review Fluids. 2016. Vol. 1, no. 2. P. 023901.
3. Tadrist L., Shim J. B., Gilet T., Schlagheck P. Faraday instability and subthreshold Faraday waves: surface waves emitted by walkers // Journal of Fluid Mechanics. 2018. Vol. 848. P. 906–945.
4. Liu F., Kang N., Li Y., Wu Q. Experimental investigation on the atomization of a spherical droplet induced by Faraday instability // Experimental Thermal and Fluid Science. 2019. Vol. 100. P. 311–318.
5. Ebo-Adou A. H., Tuckerman L. S., Shin S., Chergui, J., Juric D. Faraday instability on a sphere: numerical simulation // Journal of Fluid Mechanics. 2019. Vol. 870. P. 433–459.
6. Perlin M., Schultz W. W. Capillary effects on surface waves // Annual review of fluid mechanics. 2000. Vol. 32, no. 1. P. 241–274.
7. Chu X., Chang L., Jia B., Jian Y. Effect of the odd viscosity on faraday wave instability // Physics of Fluids. 2022. Vol. 34, no. 11. P. 11423.
8. Chu X., Jian Y. Electrostatically induced Faraday instability of thin film with spontaneous odd viscosity // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2023. Vol. 314. P. 105013.
9. Dinesh B., Livesay J., Ignatius I. B., Narayanan R. Pattern formation in Faraday instability—experimental validation of theoretical models // Philosophical Transactions of the Royal Society A. 2023. Vol. 381. No. 2245. P. 20220081.
10. Benjamin T. B., Ursell F. J. The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. 1954. Vol. 225, no. 1163. P. 505–515.
11. Kumar K. Linear theory of Faraday instability in viscous liquids // Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1996. Vol. 452, no. 1948. P. 1113–1126.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: в 10 т. Т. 6. Гидродинамика. М.: Физмат, 2001. 736 с.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: в 10 т. Т. 8: Электродинамика сплошных сред / под ред. Л. П. Питаевского. 4-е изд., стереотип. М.: Физмат, 2005. 656 с.
14. Mathews J., Walker R. L. Mathematical methods of physics // Mathematical methods of physics. New York: W. A. Benjamin, 1964. 475 p.
15. Френкель Я. И. К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1936. Т. 6, № 4. С. 347–350.
16. Tonks L. A theory of liquid surface rupture by a uniform electric field // Physical Review. 1935. Vol. 48, no. 6. P. 562.
17. Medvedev D. A., Kupershtokh A. L. Electric control of dielectric droplets and films // Physics of Fluids. 2021. Vol. 33, no. 12. P. 122103.
18. Taylor G. I., McEwan A. D. The stability of a horizontal fluid interface in a vertical electric field // Journal of Fluid Mechanics. 1965. Vol. 22, no. 1. P. 1–15.
19. Electrospinning super-assembly of ultrathin fibers from single-to multi-Taylor cone sites / X. Zhang, L. Xie, X. Wang [et al.] // Applied Materials Today. 2022. Vol. 26. P. 101272.
20. Fernández de La Mora J. The fluid dynamics of Taylor cones // Annu. Rev. Fluid Mech. 2007. Vol. 39. P. 217–243.

References

1. Faraday M. XVII. On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, 1831, no. 121, pp. 299–340.
2. Pototsky A., Bestehorn M. Faraday instability of a two-layer liquid film with a free upper. *Physical Review Fluids*, 2016, vol. 1, no. 2, pp. 023901.
3. Tadrist L., Shim J. B., Gilet T., Schlagheck P. Faraday instability and subthreshold Faraday waves: surface waves emitted by walkers. *Journal of Fluid Mechanics*, 2018, vol. 848, pp. 906–945.
4. Liu F., Kang N., Li Y., Wu Q. Experimental investigation on the atomization of a spherical droplet induced by Faraday instability. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 2019, vol. 100, pp. 311–318.
5. Ebo-Adou A. H., Tuckerman L. S., Shin S., Chergui J., Juric D. Faraday instability on a sphere: numerical simulation. *Journal of Fluid Mechanics*, 2019, vol. 870, pp. 433–459.
6. Perlin M., Schultz W. W. Capillary effects on surface waves. *Annual review of fluid mechanics*, 2000, vol. 32, no. 1, pp. 241–274.
7. Chu X., Chang L., Jia B., Jian Y. Effect of the odd viscosity on faraday wave instability. *Physics of Fluids*, 2022, vol. 34, no. 11, pp. 11423.
8. Chu X., Jian Y. Electrostatically induced Faraday instability of thin film with spontaneous odd viscosity. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2023, vol. 314, pp. 105013.
9. Dinesh B., Livesay J., Ignatius I. B., Narayanan R. Pattern formation in Faraday instability—experimental validation of theoretical models. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 2023, vol. 381, no. 2245, pp. 20220081.
10. Benjamin T. B., Ursell F. J. The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 1954, vol. 225, no. 1163, pp. 505–515.
11. Kumar K. Linear theory of Faraday instability in viscous liquids. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1996, vol. 452, no. 1948, pp. 1113–1126.
12. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Teoreticheskaya fizika. T. 6. Gidrodinamika* [Theoretical Physics. Vol. 6. Hydrodynamics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 736 p.
13. Landau, L. D., Bell, J. S., Kearsley, M. J., Pitaevskii, L. P., Lifshitz, E. M., Sykes J. B. *Teoreticheskaya fizika. T. 8. Elektrodinamika sploshnykh sred* [Theoretical Physics. Vol. 6. Electrodynamics of continuous media]; ed. by L. P. Pitaevskii. 4th ed. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005. 656 p.
14. Mathews J., Walker R. L. *Mathematical methods of physic. Mathematical methods of physics*. New York, W. A. Benjamin Publ., 1964. 475 p.
15. Frenkel Y. I. On Tonks' theory of fluid surface breakup by a constant electric field in a vacuum. *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki = Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1936, vol. 6, no. 4, pp. 347–350.
16. Tonks L. A theory of liquid surface rupture by a uniform electric field. *Physical Review*, 1935, vol. 48, no. 6, pp. 562.
17. Medvedev D. A., Kupershtokh A. L. Electric control of dielectric droplets and films. *Physics of Fluids*, 2021, vol. 33, no. 12. P. 122103.
18. Taylor G. I., McEwan A. D. The stability of a horizontal fluid interface in a vertical electric field. *Journal of Fluid Mechanics*, 1965, vol. 22, no. 1, pp. 1–15.
19. Zhang X., Xie L., Wang X., eds. Electrospinning super-assembly of ultrathin fibers from single-to multi-Taylor cone sites. *Applied Materials Today*, 2022, vol. 26, pp. 101272.

20. Fernández de La Mora J. The fluid dynamics of Taylor cones. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2007. vol. 39, pp. 217–243.

Информация об авторе / Information about the Author

Белоножко Дмитрий Федорович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры микроэлектроники и общей физики, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, г. Ярославль, Российская Федерация,
e-mail: belonozhko@mail.ru,
ORCID: 0009-0009-0356-7823,
Researcher ID: JCE-6889-2023

Dmitry F. Belonozhko, Doctor of Sciences (Physical and Mathematical), Professor of the Department of Microelectronics and General Physics, P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russian Federation,
e-mail: kuzko@mail.ru,
ORCID: 0009-0009-0356-7823,
Researcher ID: JCE-6889-2023