

## Оригинальная статья / Original article

<https://doi.org/10.21869/2223-1528-2023-13-2-164-176>

## Формирование кластерных систем в хаотичных конденсированных средах

Г. А. Мельников<sup>1</sup>, Н. М. Игнатенко<sup>1</sup> ✉, В. В. Сучилкин<sup>1</sup>, А. С. Громков<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Юго-Западный государственный университет  
ул. 50 лет Октября, д. 94, г. Курск 305040, Российская Федерация

✉ e-mail: inmkstu@bk.ru

### Резюме

**Цель.** Изучение формирования кластеров в системе хаотично движущихся и взаимодействующих частиц с учетом эффекта Ефимова и «золотого» сечения.

**Методы.** Применялись методы математического моделирования, квантовой механики, модель твердых сфер, кластерная модель.

**Результаты.** В рамках предлагаемой работы отмечается, что в трехчастичной системе частиц возможно образование их пространственной конфигурации в виде «золотого» треугольника, причем в случае возбужденного состояния двух частиц третья частица находится достаточно далеко от двух других, именно такая конфигурация соответствует условиям возникновения эффекта Ефимова в трехчастичной системе.

Основываясь на математическом формализме описания процессов самоорганизации, в работе показано, что в хаотичных средах в рамках модели Ефимова с привлечением «золотого» сечения во взаимном расположении трех взаимодействующих частиц возможно образование дискообразных кластеров, содержащих в своем составе «магическое» число частиц. В структуре этих кластеров возможно образование квантово-размерных областей в виде тора. Определены параметры таких областей.

**Заключение.** Описанная модель формирования и распада дискообразных кластеров с учетом эффекта Ефимова и правила «золотого» сечения позволяет, не прибегая к сложному решению уравнений в задаче трех тел, получить важные соотношения, следующие из строгих теорий. Из предлагаемого подхода в работе следует возможность самоорганизации кластеров и образования в их структуре квантово-размерных областей, например в виде тора, обладающих потенциальной ямой, способных захватывать заряженные частицы и определять их энергетический спектр, а также объяснять появление спектральных полос в ИК-спектрах веществ.

Предложенный подход может иметь практическое значение, например, для предсказания ИК-спектров жидкостей, наличия в жидкостях квантовых точек с широким спектром возбуждения от УФ- до ИК-излучения.

**Ключевые слова:** кластер; структура; «золотое» сечение; хаотичная среда; эффект Ефимова; торообразные области.

**Конфликт интересов:** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Для цитирования:** Формирование кластерных систем в хаотичных конденсированных средах / Г. А. Мельников, Н. М. Игнатенко, В. В. Сучилкин, А. С. Громков // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии. 2023. Т. 13, № 2. С. 164–176. <https://doi.org/10.21869/2223-1528-2023-13-2-164-176>

Поступила в редакцию 17.03.2023

Подписана в печать 26.04.2023

Опубликована 30.05.2023

## Formation of Cluster Systems in Chaotic Condensed Media

Gennady A. Melnikov<sup>1</sup>, Nikolay M. Ignatenko<sup>1</sup> ✉, Vadim V. Suchilkin<sup>1</sup>,  
Andrey S. Gromkov<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Southwest State University  
50 Let Oktyabrya Str. 94, Kursk 305040, Russian Federation

✉ e-mail: inmkstu@bk.ru

### Abstract

**Purpose.** The study of cluster formation in a system of chaotically moving and interacting particles taking into account the Efimov effect and the "golden" section.

**Methods.** Methods of mathematical modeling, quantum mechanics, a model of solid spheres, and a cluster model were used.

**Results.** Within the framework of the proposed work, it is noted that in a three-particle system of particles, it is possible to form their spatial configuration in the form of a "golden" triangle, and in the case of an excited state of two particles, the third particle is far enough away from the other two, it is this configuration that corresponds to the conditions for the occurrence of the Efimov effect in a three-particle system.

Based on the mathematical formalism of the description of self-organization processes in the work, it is shown that in chaotic environments within the framework of the Efimov model, with the involvement of the "golden" section in the mutual arrangement of three interacting particles, it is possible to form disk-shaped clusters containing a "magic" number of particles. In the structure of these clusters, the formation of quantum-dimensional regions in the form of a torus is possible. The parameters of such areas are defined.

**Conclusion.** The described model of the formation and decay of disk-shaped clusters, taking into account the Efimov effect and the "golden" section rule, allows us, without resorting to a complex solution of equations in the three-body problem, to obtain important relations following from strict theories. The proposed approach implies the possibility of self-organization of clusters and the formation of quantum-dimensional regions in their structure, for example, in the form of a torus with a potential well, capable of capturing charged particles and determining their energy spectrum, as well as explaining the appearance of spectral bands in the IR spectra of substances.

The proposed approach may be of practical importance, for example, for predicting the IR spectra of liquids, the presence of quantum dots in liquids with a wide spectrum of excitation from UV to IR radiation.

**Keywords:** cluster; structure; "golden" section; chaotic environment; Efimov effect; torus-shaped areas.

**Conflict of interest:** The authors declare no apparent or potential conflicts of interest related to the publication of this article.

**For citation:** Melnikov G. A., Ignatenko N. M., Suchilkin V. V., Gromkov A. S. Formation of Cluster Systems in Chaotic Condensed Media. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Tekhnika i tekhnologii = Proceedings of the Southwest State University. Series: Engineering and Technologies.* 2023; 13(2): 164–176. (In Russ.) <https://doi.org/10.21869/2223-1528-2023-13-2-164-176>

Received 17.03.2023

Accepted 26.04.2023

Published 30.05.2023

\*\*\*

### Введение

Эффект образования связанного состояния между частицами в трехчастичной системе впервые был обнаружен Ефимовым [1; 2]. Подробный анализ эффекта Ефимова с обширной библиографией (более 400 ссылок) проведен в обзоре [3]. Динамические взаимодействия в рамках эффекта Ефимова имеют *иерархическую*

*природу*: вначале формируются элементы структуры, служащие зародышами для образования более сложных архитектурных мотивов. Второй стадией является ассоциация некоторых элементов вторичной структуры. Следующий этап – образование специфических взаимодействий между участками, значительно удаленными один от другого, причем специфические динамические взаимодействия не

свойственны обычным парным статическим взаимодействиям типа кулоновских или ван-дер-ваальсовских. В системе, состоящей из множества частиц, эти специфические взаимодействия приводят к образованию иерархии взаимодействий [4; 18].

В рамках предлагаемой работы отмечается, что в трехчастичной системе частиц возможно образование их пространственной конфигурации в виде «золотого» треугольника, причем *в случае возбужденного состояния двух частиц, третья частица находится достаточно далеко от двух других*, именно такая конфигурация соответствует условиям возникновения эффекта Ефимова в трехчастичной системе [1–6].

Изучение процессов самоорганизации в конденсированных средах ведется на протяжении длительного времени [7]. К этому направлению относятся исследования законов синергетики (Г. Хакен [8]), теория неравновесной термодинамики (И. Р. Пригожин [9], Ю. Л. Климонтович [10]) и теория катастроф (Р. Том [11]). Самоорганизация частиц в кластерные системы наблюдается также в кристаллических структурах (самосборка) [12], в биологических веществах [13], в жидкостях (в том числе квантовых), газах и плазме [14], полимерах [15].

### Материалы и методы

В исследовании использовались методы математического моделирования, квантовой механики, модель твердых сфер, кластерная модель.

Оператор полной энергии системы  $\hat{H}$ , состоящей из трех частиц, записывается в стандартном виде [1–6]:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_2^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_3^2 + V(r_{12}) + V(r_{13}) + V(r_{23}), \quad (1)$$

где  $\hbar$  – приведённая постоянная Планка;  $\nabla$  – оператор набла;  $m$  – масса частицы;  $V(r_{12})$ ,  $V(r_{13})$ ,  $V(r_{23})$  – парные потенциалы взаимодействия частиц;  $r_{12}$ ,  $r_{13}$ ,  $r_{23}$  – расстояния между частицами,  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ .

Решение этой задачи для сил нулевого радиуса действия было выполнено Г. В. Скорняковым и К. А. Тер-Мартirosяном [4]:

$$\left( -\frac{3}{4} \nabla_R^2 - \nabla_r^2 + k^2 \right) \Psi(\vec{R}_k, \vec{r}_{ij}) = 4\pi \left( F_1(R_1) \delta^3(r_{23}) + F_2(R_2) \delta^3(r_{13}) + F_3(R_3) \delta^3(r_{12}) \right), \quad (2)$$

$$\Psi(\vec{R}_k, \vec{r}_{ij}) \rightarrow_{r_{ij} \rightarrow 0} \left( \frac{1}{r_{ij}} - \frac{1}{a_{ij}} \right) F_k(\vec{R}_k), \quad (3)$$

где  $k$  – относительное волновое число между двумя частицами;  $\Psi(\vec{R}_k, \vec{r}_{ij})$  – волновая функция;  $F_1(R_1)$ ,  $F_2(R_2)$ ,  $F_3(R_3)$  – гиперрадиальные функции;  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  – гиперрадиусы;  $\delta(r_{12})$ ,  $\delta(r_{13})$ ,  $\delta(r_{23})$  – фазовые сдвиги;  $a$  – длина рассеяния.

Уравнение (2) было обобщено Л. Д. Фаддеевым для потенциалов конечного радиуса [5; 6]. Расширение модели (2), оставляющее взаимодействие между частицами точечным, приводит к волновым функциям рассеяния, удовлетворяющим при всех  $k > 0$  равенству [1–6]

$$\frac{d}{dr} \ln [r \Psi(k)] \downarrow_{r \rightarrow 0} = k \operatorname{ctg} \delta(k). \quad (4)$$

Решение системы уравнений типа уравнений Фаддеева для трех частиц было найдено В. И. Ефимовым [1–6].

Уравнение Шредингера в гиперсферических координатах имеет вид

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial R^2} + V_n(R) - k^2 \right) \sqrt{R} F_n(R) = 0, \quad (5)$$

$$V_n(R) = \frac{s_n^2 - 1/4}{R^2}, \quad (6)$$

где  $V_n(R)$  – гиперрадиальный потенциал Ефимова;  $R$  – гиперрадиус.

Как показали расчеты, при значении параметра  $s_n = s_0 \approx \pm 1,00624i$  решение системы уравнений (5) и (6) является мнимым. В этом случае потенциал (6) становится отталкивающим и трактуется как центробежный барьер для свободного движения трехчастичной системы, при этом  $R_0$  приводит к эффективному притяжению трех тел [16; 17].

Теория Ефимова содержит некоторые важные положения.

1. Эффект Ефимова проявляется наиболее четко, если третья частица в трехчастичной системе оказывается меньше двух остальных по массе и размерам.

2. В конфигурационном пространстве положение трех частиц описывается параметрами приведенных координат Якоби  $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$ , причем  $(\alpha = 1, 2, 3)$  они образуют циклическую перестановку индексов  $(1, 2, 3)$ . Набор координат  $\alpha$  описывает разбиение трех частиц на пару частиц-димер  $(\beta, \gamma)$  и отдельную частицу  $\alpha$  [3; 17].

$$\begin{aligned} \bar{x}_\alpha &= \left[ \frac{2m_\beta m_\gamma}{m_\beta + m_\gamma} \right]^{\frac{1}{2}} (\vec{r}_\beta - \vec{r}_\gamma), \\ \bar{y}_\alpha &= \left[ \frac{2m_\alpha (m_\beta + m_\gamma)}{m_\alpha + m_\beta + m_\gamma} \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left( \vec{r}_\alpha - \frac{m_\beta \vec{r}_\beta + m_\gamma \vec{r}_\gamma}{m_\beta + m_\gamma} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $m_\alpha, m_\beta, m_\gamma$  – массы частиц;  $\vec{r}_\alpha, \vec{r}_\beta, \vec{r}_\gamma$  – радиусы-векторы, определяющие положение частиц в пространстве.

Полная волновая функция в этом случае представляется в виде суммы функций Фаддеева [1–6].

3. В системе трех частиц, взаимодействующих с силами малого радиуса ( $r_0$ ), с длиной рассеяния  $a$ , возникают специфические уровни энергии, не зависящие от радиуса действия сил взаимодействия – уровни Ефимова. Приблизительно их число можно найти по формуле [1–6]

$$N \approx \frac{1}{\pi} \ln \left( \frac{a}{r_0} \right). \quad (8)$$

Отличие энергий соседних энергетических уровней Ефимова можно найти по формуле

$$\frac{E_n}{E_{n+1}} = \exp(2\pi). \quad (9)$$

Если  $r_0 \rightarrow 0$ , то  $N \rightarrow \infty$ , тогда согласно уравнениям Скорнякова – Тер-Мартirosяна энергетические уровни являются наблюдаемыми и имеют физический смысл. Ефимов предсказал, что для трех одинаковых бозонов с резонансным взаимодействием двух тел существует набор связанных состояний (тример).

Интересно отметить, что эффект Ефимова для системы трех квантовых частиц при квантово-механическом описании прогнозирует, что трехчастичные «связанные состояния» становятся собственными векторами в теории эффекта, при этом на решетке «выделенного центра масс» системы реализация гамильтониана как «расслоенного оператора», т. е. «прямого интеграла семейства операторов»  $H(K)$ , зависят от полного квазиимпульса  $K \in T^3$ , где  $T^3$  – трехмерный тор [18; 19], т. е. три связанные частицы образуют сферическую квантово-размерную область. В

случае образования дискообразного кластера эти сферы преобразуются в тор. В случае захвата в тороидальную квантово-размерную область заряженной частицы эта область становится «квантовой точкой» с излучением электромагнитной волны определенной частоты [20].

## Результаты и их обсуждение

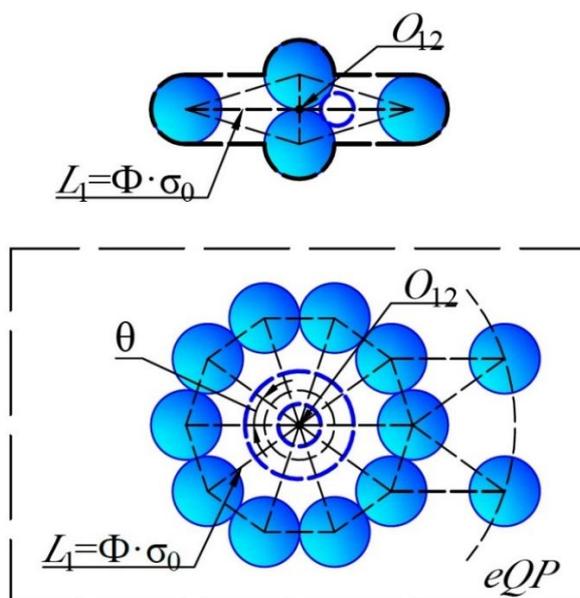
### Геометрический фактор и «золотая» пропорция в эффекте Ефимова

Если расстояние между двумя частицами соответствует минимуму потенциальной энергии взаимодействия, но для образования связанного состояния частиц ее недостаточно, то появление третьей частицы на расстоянии, превышающем расстояние между тесной парой, приводит к возникновению эффекта Ефимова (рис. 1) [1–5].

В хаотической системе частиц в результате случайных процессов центры масс трех связанных частиц могут образовывать равнобедренный треугольник, стороны и углы которого соответствуют «золотому» сечению. В этом случае диаметр одной из двух взаимодействующих частиц  $\sigma$  (в димере) и расстояние до третьей возмущающей частицы  $L_1$  определится на основе свойств «золотого» треугольника формулой (рис. 1)

$$L_1 = \frac{\sigma}{2 \sin \frac{\theta}{2}}, \quad (10)$$

где  $L_1 = \Phi \sigma$  для угла  $36^\circ$ ;  $\theta$  – «золотой» угол;  $\Phi = 1,6180339\dots$  – значение «золотой» пропорции («золотое» сечение).



**Рис. 1.** Формирование дискообразного кластера абсолютно твердых сфер на основе «золотого» правила

**Fig. 1.** Formation of a disk-shaped cluster of absolutely solid spheres based on the "golden" rule

Плоскость, перпендикулярную плоскости равнобедренного треугольника и проходящую через его вершину и центр масс двух частиц (димер) его основания, назовем *экваториальной плоскостью формирующегося кластера eQP*. Путем

поворота трехчастичной системы ( $m_1, m_2, m_3$ ) вокруг оси  $Z$  на «золотой» угол формируется также «золотой» треугольник с вершинами в центре масс димера и центрами частиц диаметром  $\sigma_0$  в экваториальной плоскости (см. рис. 1).

Количество плотноупакованных абсолютно твердых сфер  $N_1$ , располагающихся в плоскости  $eQP$ , зависит от «золотого» угла  $\theta$ :

$$N_1 = \frac{360^\circ}{\theta}. \quad (11)$$

Расчеты параметров равнобедренных треугольников, лежащих в плоскости  $eQP$ , представлены в таблице 1.

Под «золотым» углом в настоящей работе понимается угол при вершине од-

ного из равнобедренных треугольников, лежащих в экваториальной плоскости, под которым виден диаметр третьей частицы. При делении полного угла в  $360^\circ$  на «золотой» угол должно получиться целое число, задающее количество частиц на периферии дискообразного кластера. Формирование дискообразного кластера, а также образование первоначального «золотого» треугольника из трех связанных частиц определяется условиями (10) и (11).

**Таблица 1.** Параметры «золотых» треугольников

**Table 1.** Parameters of the "golden" triangles

№	$\theta$	$N_1 = \frac{360^\circ}{\theta}$ (11)	$2 \sin \frac{\theta}{2}$	$\frac{L_1}{\sigma}$ (10)
1	$72^\circ$	5	1,17557...	0,85065...
2	$36^\circ$	10	0,61803...	$\Phi = 1,618033...$
3	$18^\circ$	20	0,31287...	$2\Phi = 3,23607...$
4	$12^\circ$	30	0,20906...	$3\Phi = 4,85410...$
5	$9^\circ$	40	0,15692...	$4\Phi = 6,47213...$
6	$6^\circ$	60	0,10462...	$6\Phi = 9,70820...$
7	$3^\circ$	120	0,052354...	$12\Phi = 19,4164...$
8	$2^\circ$	180	0,034905...	$18\Phi = 29,1246...$
9	$1^\circ$	360	0,017453...	$35\Phi = 56,6312...$ 57,2967...

При «золотом» угле равном  $1^\circ$  расстояние между центром масс димера и центром масс третьей частицы, т. е. расстояние, при котором происходит образование связанного состояния трех частиц, максимально и равно

$$L_{cap} = 57,2938... \cdot \sigma_0, \quad (12)$$

где  $\sigma_0$  – диаметр третьей частицы в трехчастичном треугольнике в экваториальной плоскости.

В работе [21] показано, что для  $He_3$  в случае основного состояния система  $He_3$

образует равносторонний треугольник, в случае возбужденного состояния один из атомов находится достаточно далеко от двух других, причем именно эта конфигурация соответствует условиям возникновения эффекта Ефимова в трехчастичной системе. В рассматриваемом приближении вид парных потенциалов взаимодействия не оказывает существенного влияния на результаты расчетов.

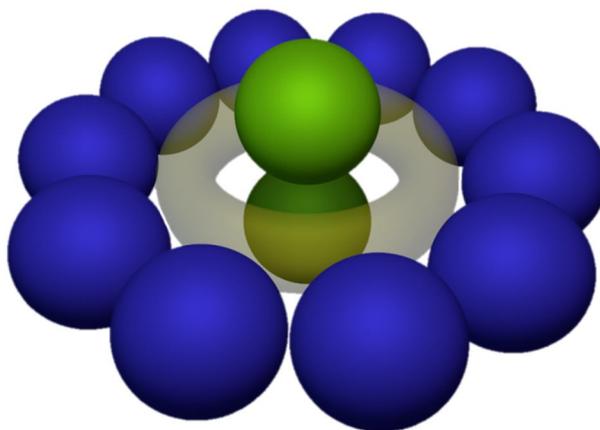
Для трехчастичной системы  $He_4$ , диаметр атома которого в модели абсолютно твердой сферы составляет  $2,10 \text{ \AA}$ , следовательно, в рамках предложенной модели

согласно формуле (12) захват третьей частицы димером  $\text{He}_4$  произойдет на расстоянии приблизительно в  $120 \text{ \AA}$ , что коррелирует с длиной рассеяния в модели Ефимова ( $L = 104 \text{ \AA}$  [21]).

Формирование дискообразных кластеров в системе хаотично движущихся и взаимодействующих частиц происходит в несколько этапов.

*I этап:* в результате эффекта Ефимова возникает связанное состояние трех частиц. При этом их центры масс могут образовать равнобедренный треугольник, стороны и углы которого соответствуют «золотому» сечению.

*II этап:* получившийся треугольник становится основой для дальнейшего процесса самоорганизации. В плоскости, перпендикулярной плоскости равнобедренного треугольника и проходящей через его вершину и центр масс двух частиц (димер) его основания, формируются равнобедренные «золотые» треугольники, подобные друг другу, имеющие одну общую вершину в центре масс димера. В получившемся дискообразном кластере (рис. 2) число частиц на периферийном круге зависит от величины «золотого» угла в равнобедренном треугольнике (см. табл. 1).



**Рис. 2.** Тороидальная квантово-размерная область в структуре дискообразного кластера

**Fig. 2.** A toroidal quantum-dimensional region in the structure of a disk-shaped cluster

В работе [22] сообщается о существовании дискообразных кластеров и об обнаружении магических чисел в двумерных кластерах  $\text{Ag}$ , выращенных на квантовых подложках  $\text{Pb}$ .

При изучении масс-спектрограмм кластеров натрия [23] выявлены кластеры с числом атомов  $N = 8, 20, 40, 58$  и  $92$ , которые являются магическими.

*III этап:* в результате самоорганизации элементов ефимовских тримеров формируется дискообразный кластер, в экваториальной плоскости которого образован планарный кластер с центром в центре масс димерного образования и числом частиц, кратных одному из «золотых» углов,

причем число частиц в планарном кластере являются магическими числами и связаны с правилом Цекендорфа.

В настоящей работе авторы придерживаются классической трактовки магических чисел, которая следует из ряда чисел Фибоначчи, при этом кластеры с числом частиц, соответствующих одному из магических чисел, являются наиболее устойчивыми.

Если параметры структуры кластера удовлетворяют «золотому» сечению, то взаимодействие между частицами происходит по определенному закону. Действительно, воспользуемся наиболее общим

степенным потенциалом Г. Ми (Mie)  $\varphi(r_{ij})$  [24]:

$$\varphi(r_{ij}) = C_{ij} \varepsilon_0 \left[ \left( \frac{\sigma_0}{r_{ij}} \right)^n - \left( \frac{\sigma_0}{r_{ij}} \right)^m \right], \quad (13)$$

$$C_{ij} = \frac{n}{n-m} \left( \frac{n}{m} \right)^{\frac{m}{n-m}}, \quad \sigma_0 = \left( \frac{m}{n} \right)^{\frac{1}{n-m}} R_1, \quad (14)$$

где  $\varepsilon_0$  – глубина потенциальной ямы;  $\sigma_0$  – эффективный диаметр взаимодействующих частиц;  $n \geq m$  – целочисленные показатели степени;  $R_1$  – радиус первой координационной сферы.

Из (10) и (13) вытекает соотношение, связывающее показатели  $m$  и  $n$  потенциала с «золотым» сечением  $\Phi$  (при угле  $36^\circ$ ):

$$\left( \frac{n}{m} \right)^{\frac{1}{n-m}} = \Phi. \quad (15)$$

Для случая  $m = 2, n = 3$  в (15) выражение потенциала (13) примет вид

$$\varphi(r_{ij}) = \frac{9}{4} \varepsilon_0 \left[ \left( \frac{\sigma_0}{r_{ij}} \right)^3 - \left( \frac{\sigma_0}{r_{ij}} \right)^2 \right]. \quad (16)$$

Выбор потенциала в виде (16) позволяет предсказать в системе частиц возникновение иерархии взаимодействий, когда слабые взаимодействия вызывают более сильные взаимодействия в системе частиц [1–6; 17].

Если в потенциале (13) принять  $m = 1, n = 2$ , тогда

$$\varphi(r_{ij}) = 4\varepsilon_0 \left[ \left( \frac{\sigma_0}{r_{ij}} \right)^2 - \left( \frac{\sigma_0}{r_{ij}} \right) \right]. \quad (17)$$

Потенциал (17) является частным случаем потенциала Кратцера [25].

Если взаимодействие между частицами описывается потенциалом Кратцера в виде

$$V(r) = -2D_e \left( \frac{\sigma_0}{r} - \frac{1}{2} \frac{\sigma_0^2}{r^2} \right), \quad (18)$$

где  $D_e$  – глубина потенциальной ямы, то в этом случае уравнение Шредингера допускает точное решение и позволяет получить формулу для собственных значений энергии колебательно-вращательных движений и описывается уравнением Данхэма [26]:

$$E_{nl} = -\frac{2m}{\hbar^2} D_e^2 \sigma_0^2 \times \left[ n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left( l + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2mD_e}{\hbar^2} \sigma_0^2} \right]^{-2}. \quad (19)$$

*IV этап:* диаметр дискообразного кластера определяется радиусом действия ефимовских сил и геометрически однозначно связан с боковыми сторонами равнобедренного ефимовского треугольника, величина которого определяется «золотой» пропорцией (рис. 2).

Параметры квантово-размерной области в структуре дискообразного кластера в виде тора можно вычислить из геометрических соображений:

$$R_{Tor} = \left( \frac{m_0}{2m + m_0} \right) \frac{\sigma}{2} \operatorname{ctg} \left( \frac{\theta}{2} \right). \quad (20)$$

Если масса  $m$  трех связанных частиц в «золотом» треугольнике одинакова, то большой радиус тора

$$R_{Tor} = \frac{\sigma}{6} \operatorname{ctg} \left( \frac{\theta}{2} \right), \quad (21)$$

а малый

$$r_{Tor} = \varphi \frac{\sigma}{2}. \quad (22)$$

Из (21) и (22) следует

$$V_{Tor} = \frac{(\pi\varphi)^2}{12} \sigma^3 \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0,3137\sigma^3 \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (23)$$

Тор в результате математических преобразований можно получить из прямоугольника отождествлением точек на противоположных сторонах. Очевидно, справедливо обратное утверждение, поэтому движение заряженной частицы в объеме тора можно трактовать как движение этой частицы в плоской потенциальной яме шириной  $l = 2\pi r_{Tor}$  и конечной глубины  $h = 2\pi R_{Tor}$ . Такой подход делает возможным использовать уже существующую теорию (квантовую) движения заряженных частиц в потенциальной яме и расчета их энергетического спектра [27].

Кластерная модель, предлагаемая авторами, позволяет объяснить появление спектральных полос в ИК-спектрах углеводородных жидкостей [28; 29].

## Выводы

1. Благодаря эффекту Ефимова в неупорядоченных конденсированных средах возможно образование связанных состояний трех частиц. Если расстояния между этими частицами удовлетворяют «золотой» пропорции, то возможно образование дискообразных кластеров.

2. При использовании потенциала Кратцера для описания взаимодействия частиц в структуре кластера собственные значения энергии колебательно-вращательных движений молекул описываются уравнением Данхэма.

3. Выявлены новые алгоритмы в процессах формирования и распада дискообразных кластерных систем на основе эффекта Ефимова с привлечением теоремы Цекендорфа и правила «золотой» пропорции при делении кластеров. Предложенная модель позволяет, не прибегая к сложному решению уравнений в задаче трех тел, получить важные соотношения, следующие из строгих теорий.

## Список литературы

1. Ефимов В. И. Слабосвязанные состояния трёх резонансно взаимодействующих частиц // Ядерная физика. 1970. Т. 12. С. 1080–1090.
2. Efimov V. Energy levels of three resonantly interacting particles // Nucl. Phys. A. 1973. Vol. 210. P. 157–188.
3. Naidon P., Endo S. Efimov physics: a review // Reports on Progress in Physics. 2017. Vol. 80, no. 5. P. 056001. <https://doi.org/10.1088/1361-6633/aa50e8>.
4. Скорняков Г. В., Тер-Мартirosян К. А. Задача трех тел при короткодействующих силах // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1956. Т. 31, вып. 5. С. 775–790.
5. Фаддеев Л. Д. Теория рассеяния для системы из трех частиц // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1960. Т. 39, вып. 5. С. 1459–1467.
6. Макаров К. А., Мележик В. В., Мотовилов А. К. Точечные взаимодействия в задаче трех квантовых частиц с внутренней структурой // Теоретическая и математическая физика. 1995. Т. 102, № 2. С. 258–282.
7. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации / пер. с англ. В. Ф. Пастушенко; под ред. Ю. А. Чизмаджева. М.: Мир, 1979. 512 с.
8. Хакен Г. Синергетика: иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах / пер. с англ. Ю. А. Данилова; под ред. [и с предисл.] Ю. Л. Климонтовича. М.: Мир, 1985. 419 с.

9. Пригожин И. Р. Введение в термодинамику необратимых процессов / пер. с англ. В. В. Михайлова; под ред. Н. С. Акулова. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 160 с.
10. Климонтович Ю. Л. Введение в физику открытых систем. М.: Янус-К, 2002. 284 с.
11. Манин Ю. И. Математика как метафора. М.: МЦНМО, 2010. 424 с.
12. Илюшин Г. Д. Моделирование процессов самоорганизации в кристаллообразующих системах. М.: Едиториал УРСС, 2003. 376 с.
13. Исаева В. В. Самоорганизация биологических систем // Известия РАН. Серия Биологическая. 2012. № 2. С. 144–153.
14. Гончаров А. В. Процессы роста кластеров в кластерной плазме // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2008. Т. 6. URL: <https://chemphys.edu.ru/media/published/2008-01-25-001.pdf> (дата обращения: 13.03.2023).
15. Волынский А. Л., Баженов С. Л., Бакеев Н. Ф. Неустойчивость и самоорганизация в полимерных системах // Высокомолекулярные соединения. Серия С. 2002. Т. 44, № 12. С. 2352–2374.
16. Mark P., Taylor J., Lipson E. G. A site–site Born–Green–Yvon equation for hard sphere dimmers // J. Chem. Phys. 1994. Vol. 100. P. 518–527. <https://doi.org/10.1063/1.466966>.
17. Позднеев С. А. Многочастичная теория возникновения резонансного взаимодействия, приводящего к новому типу химической связи // Краткие сообщения по физике. ФИАН. 2003. № 5. С. 3–19.
18. Лакаев С. Н. О бесконечном числе трехчастичных связанных состояний системы трех квантовых решетчатых частиц // Теоретическая и математическая физика. 1991. Т. 89, № 1. С. 94–104.
19. Quantum field theory on toroidal topology: algebraic structure and applications / F. C. Khanna, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson, A. E. Santana // Physics Reports. 2014. Vol. 539(3). P. 135–224. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2014.02.002>.
20. Wandering quantum dots (WQDs) in the structure of disordered condensed matter / G. A. Melnikov, V. V. Suchilkin, N. M. Ignatenko, P. A. Krasnykh // 2020 7th International Congress on Energy Fluxes and Radiation Effects (EFRE). Tomsk: IEEE, 2020. P. 998–1003. <https://doi.org/10.1109/EFRE47760.2020.9241961>.
21. Determination of the bond length and binding energy of the helium dimer by diffraction from a transmission grating / R. E. Grisenti, W. Schollkopf, J. P. Toennies, G. C. Hegerfeldt, T. Kohler, M. Stoll // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 85(11). P. 2284–2287. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.85.2284>.
22. Magic numbers of atoms in surface-supported planar clusters / Y.-P. Chiu, L.-W. Huang, C.-M. Wei, C.-S. Hang, T.-T. Tsong // Phys. Rev. Lett. 2006. Vol. 97(16). P. 165504. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.165504>.
23. Electronic shell structure and abundances of sodium clusters / W. D. Knight, Keith Clemenger, Walt A. de Heer, Winston A. Saunders, M. Y. Chou, Marvin L. Cohen // Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 52(24). P. 2141–2143. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.52.2141>.
24. Mie G. Zur kinetischen theorie der einatomigen korper // Annalen der Physik. 1903. Vol. 316(8). P. 657–697. <https://doi.org/10.1002/andp.19033160802>.
25. Kratzer A. Die ultraroten rotationsspektren der halogenwasserstoffe // Zeitschrift für Physik. 1920. Vol. 3(5). P. 289–307. <https://doi.org/10.1007/BF01327754>.
26. Dunham J. L. The energy levels of a rotating vibrator // Phys. Rev. 1932. Vol. 41(6). P. 721–731. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.41.721>.

27. Мельников Г. А., Игнатенко Н. М., Громков А. С. Самоорганизация малых кластерных систем в рамках модели Ефимова // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2022. № 3. С. 5–18.

28. Характерные особенности низкочастотной области инфракрасных спектров и кластерная модель строения жидкостей / Г. А. Мельников, Н. М. Игнатенко, К. Н. Болдырев, О. А. Манжос, А. С. Громков // Оптика и спектроскопия. 2023. Т. 131, вып. 3. С. 361–369.

29. Melnikov G. A. Clusters of Fibonacci in the structure of condensed medium // Известия вузов. Физика. 2018. Т. 61, № 9-2(729). С. 207–210.

## References

1. Efimov V. I. Slabosvyazannyye sostoyaniya trokh rezonansno vzaimodeystvuyushchikh chastits [Loosely coupled states of three resonantly interacting particles]. *Yadernaya fizika = Nuclear Physics*, 1970, vol. 12, pp. 1080–1090.

2. Efimov V. Energy levels of three resonantly interacting particles. *Nucl. Phys. A*, 1973, vol. 210, pp. 157–188.

3. Naidon P., Endo S. Efimov physics: a review. *Reports on Progress in Physics*, 2017, vol. 80, no. 5, pp. 056001. <https://doi.org/10.1088/1361-6633/aa50e8>

4. Skornyakov G. V., Ter-Martirosyan K. A. Zadacha trekh tel pri korotkodeystvuyushchikh silakh [The problem of three bodies with short-acting forces]. *Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki = Journal of experimental and theoretical physics*, 1956, vol. 31, is. 5, pp. 775–790.

5. Faddeev L. D. Teoriya rasseyaniya dlya sistemy iz trekh chastits [Scattering theory for a system of three particles]. *Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki = Journal of experimental and theoretical physics*, 1960, vol. 39, is. 5, pp. 1459–1467.

6. Makarov K. A., Melezhik V. V., Motovilov A. K. Tochechnyye vzaimodeystviya v zadache trekh kvantovykh chastits s vnutrenney strukturoy [Point interactions in the problem of three quantum particles with an internal structure]. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika = Theoretical and mathematical physics*, 1995, vol. 102, no. 2, pp. 258–282.

7. Nikolis G., Prigozhin I. Samoorganizatsiya v neravnovesnykh sistemakh. Ot dissipativnykh struktur k uporyadochennosti cherez fluktuatsii [Self-organization in nonequilibrium systems. From dissipative structures to orderliness through fluctuations]. Moscow, Mir Publ., 1979. 512 p.

8. Haken G. Sinergetika: iyerarkhii neustoychivostey v samoorganizuyushchikhsya sistemakh i ustroystvakh [Synergetics: hierarchies of instabilities in self-organizing systems and devices]. Moscow, Mir Publ., 1985. 419 p.

9. Prigozhin I. R. Vvedeniye v termodinamiku neobratimyykh protsessov [Introduction to the thermodynamics of irreversible processes]. Izhevsk, Regular and chaotic dynamics Publ., 2001. 160 p.

10. Klimontovich Yu. L. Vvedeniye v fiziku otkrytykh sistem [Introduction to the physics of open systems]. Moscow, Janus-K Publ., 2002. 284 p.

11. Manin Yu. I. Matematika kak metafora [Mathematics as a metaphor]. Moscow, MCCME Publ., 2010. 424 p.

12. Ilyushin G. D. Modelirovaniye protsessov samoorganizatsii v kristalloobrazuyushchikh sistemakh [Modeling of self-organization processes in crystal-forming systems]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2003. 376 p.

13. Isaeva V. V. Samoorganizatsiya biologicheskikh sistem [Self-organization of biological systems]. *Izvestiya RAN. Seriya Biologicheskaya = Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Series Biological*, 2012, no. 2, pp. 144–153.

14. Goncharov A. V. Protsessy rosta klasterov v klasternoy plazme [Processes of cluster growth in cluster plasma]. *Fiziko-khimicheskaya kinetika v gazovoy dinamike = Physico-chemical kinetics in gas dynamics*, 2008, vol. 6. Available at: <https://chemphys.edu.ru/media/published/2008-01-25-001.pdf> (accessed 03.13.2023).

15. Volynsky A. L., Bazhenov S. L., Bakeev N. F. Neustoychivost' i samoorganizatsiya v polimernykh sistemakh [Instability and self-organization in polymer systems]. *Vysokomolekulyarnyye soyedineniya. Seriya C = High-molecular compounds. Series C*, 2002, vol. 44, no. 12, pp. 2352–2374.

16. Mark P., Taylor J., Lipson E. G. A site–site Born–Green–Yvon equation for hard sphere dimmers. *J. Chem. Phys.*, 1994, vol. 100, pp. 518–527. <https://doi.org/10.1063/1.466966>

17. Pozdneev S. A. Mnogochastichnaya teoriya vznikhoveniya rezonansnogo vzaimodeystviya, privodyashchego k novomu tipu khimicheskoy svyazi [Multiparticle theory of the occurrence of resonant interaction leading to a new type of chemical bond]. *Kratkiye soobshcheniya po fizike. FIAN = Brief reports on physics. PhIAS*, 2003, no. 5, pp. 3–19.

18. Lakaev S. N. O beskonechnom chisle trekhchastichnykh svyazannykh sostoyaniy sistema trekh kvantovykh reshchatykh chastits [On the infinite number of three-particle bound states of a system of three quantum lattice particles]. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika = Theoretical and mathematical physics*, 1991, vol. 89, no. 1, pp. 94–104.

19. Khanna F. C., Malbouisson A. P. C., Malbouisson J. M. C., Santana A. E. Quantum field theory on toroidal topology: algebraic structure and applications. *Physics Reports*, 2014, vol. 539 (3), pp. 135–224. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2014.02.002>

20. Melnikov G. A., Suchilkin V. V., Ignatenko N. M., Krasnykh P. A. Wandering quantum dots (WQDs) in the structure of disordered condensed matter. *2020 7th International Congress on Energy Fluxes and Radiation Effects (EFRE)*. Tomsk, IEEE, 2020, pp. 998–1003. <https://doi.org/10.1109/EFRE47760.2020.9241961>

21. Grisenti R. E., Schollkopf W., Toennies J. P., Hegerfeldt G. C., Kohler T., Stoll M. Determination of the bond length and binding energy of the helium dimer by diffraction from a transmission grating. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, vol. 85 (11), pp. 2284–2287. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.85.2284>.

22. Chiu Y.-P., Huang L.-W., Wei C.-M., Hang C.-S., Tsong T.-T. Magic numbers of atoms in surface-supported planar clusters. *Phys. Rev. Lett.*, 2006, vol. 97 (16), pp. 165504. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.165504>

23. Knight W. D., Clemenger K., de Heer W. A., Saunders W. A., Chou M. Y., Cohen M. L. Electronic shell structure and abundances of sodium clusters. *Phys. Rev. Lett.*, 1984, vol. 52 (24), pp. 2141–2143. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.52.2141>

24. Mie G. [The kinetic theory of monatomic solids]. *Annals of Physics*, 1903, vol. 316 (8), pp. 657–697. (In Germany) <https://doi.org/10.1002/andp.19033160802>

25. Kratzer A. [The ultra-red rotational spectra of hydrogen halides]. *Journal of Physics*, 1920, vol. 3 (5), pp. 289–307. (In Germany) <https://doi.org/10.1007/BF01327754>

26. Dunham J. L. The energy levels of a rotating vibrator. *Phys. Rev.*, 1932, vol. 41 (6), pp. 721–731. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.41.721>

27. Melnikov G. A., Ignatenko N. M., Gromkov A. S. Samoorganizatsiya malykh klasternykh sistem v ramkakh modeli Yefimova [Self-organization of small cluster systems within the framework of the Efimov model]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Se-*

riya: *Fizika. Matematika* = *Bulletin of the Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2022, no. 3, pp. 5–18.

28. Melnikov G. A., Ignatenko N. M., Boldyrev K. N., Manzhos O. A., Gromkov A. S. *Kharakternyye osobennosti nizkochastotnoy oblasti infrakrasnykh spektrov i klasternaya model' stroeniya zhidkostey* [Characteristic features of the low-frequency region of infrared spectra and a cluster model of the structure of liquids]. *Optika i spektroskopiya* = *Optics and spectroscopy*, 2023, vol. 131, is. 3, pp. 361–369.

29. Melnikov G. A. Clusters of Fibonacci in the structure of condensed medium. *Izvestiya vuzov. Fizika* = *Proceedings of Universities. Physics*, 2018, vol. 61, no. 9-2 (729), pp. 207–210.

---

### Информация об авторах / Information about the Authors

**Мельников Геннадий Александрович**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник кафедры нанотехнологий, микроэлектроники, общей и прикладной физики, Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Российская Федерация, e-mail: melnikovga@mail.ru, ORCID: 0000-0001-9017-6285

**Gennady A. Melnikov**, Cand. of Sci. (Physics and Mathematics), Senior Researcher of the Departments of Nanotechnology, Microelectronics, General and Applied Physics, Southwest State University, Kursk, Russian Federation, e-mail: melnikovga@mail.ru, ORCID: 0000-0001-9017-6285

**Игнатенко Николай Михайлович**, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры нанотехнологий, микроэлектроники, общей и прикладной физики, Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Российская Федерация, e-mail: inmkstu@bk.ru, ORCID: 0000-0002-2807-9887

**Ignatenko Nikolay M.**, Dr. of Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Professor of the Department of Nanotechnology, Microelectronics, General and Applied Physics, Southwest State University Kursk, Russian Federation, e-mail: inmkstu@bk.ru, ORCID: 0000-0002-2807-9887

**Сучилкин Вадим Викторович**, старший преподаватель кафедры нанотехнологий, микроэлектроники, общей и прикладной физики, Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Российская Федерация, e-mail: svadim07@rambler.ru

**Vadim V. Suchilkin**, Senior Lecturer of the Departments of Nanotechnology, Microelectronics, General and Applied Physics, Southwest State University, Kursk, Russian Federation, e-mail: svadim07@rambler.ru

**Громков Андрей Сергеевич**, аспирант кафедры нанотехнологий, микроэлектроники, общей и прикладной физики, Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Российская Федерация, e-mail: andrei\_gromkov@mail.ru, ORCID: 0000-0001-6710-9949

**Andrey S. Gromkov**, Post-Graduate Student of the Departments of Nanotechnology, Microelectronics, General and Applied Physics, Southwest State University, Kursk, Russian Federation, e-mail: andrei\_gromkov@mail.ru, ORCID: 0000-0001-6710-9949